¿Qué forma tiene el espacio?*

◆

MAX NEUMANN COTO

Si pensamos en el universo como todo lo que existe, y en el espacio como el lugar que ocupa todo el universo, entonces parece natural preguntarse: ¿qué forma tiene el espacio? Los babilonios y los egipcios creían que el universo era una ostra firmemente cerrada, rodeada de agua y sostenida por el firmamento sólido. Esta idea de un universo "cerrado" se transformó profundamente en Grecia, donde ya para el siglo V a. C. se pensaba que el universo era infinito.

La forma es el tema central de la geometría, que se desarrolló a partir de las ideas que se tenían sobre el espacio. La geometría primitiva, basada en la intuición y los experimentos, se transformó en Grecia en una geometría deductiva, guiada por razonamientos lógicos. Así, la geometría de Euclides está basada en ciertos postulados y axiomas, que se suponen ciertos, y a partir de éstos se trata de deducir lógicamente toda la geometría. Algunos de los postulados de la geometría euclidiana son los siguientes:

Una línea recta es la trayectoria más corta entre dos puntos.

Por dos puntos distintos pasa una sola línea recta.

Por cada punto pasa una (y sólo una) paralela a una línea recta dada.

Estas afirmaciones nos parecen tan evidentes, y están tan arraigadas en nuestro sentido común, que no dudamos que la geometría euclidiana sea la geometría de nuestro universo y la única posible. Incluso, en el mundo de la ciencia, durante siglos se hicieron intentos para demostrar que el postulado de las paralelas era una consecuencia lógica de los otros postulados. Sin embargo, a principios del siglo XIX, Bolyai y Lobachevsky mostraron irrefutablemente que la búsqueda era una quimera: había otras geometrías en las que los demás postulados de Euclides eran válidos, pero el de las paralelas no. La geometría que descubrieron Bolyai y Lobachevsky es la *geometría hiperbólica*, en la que por un punto pasa no una sino una infinidad de paralelas a una línea recta dada. Esta geometría parecía una mera invención matemática, pero, poco tiempo después, Riemann describió otra geometría más natural en la que no hay ninguna paralela. Las geometrías no euclidianas parecían no tener relación con la realidad hasta que, a principios de este siglo, la naturaleza euclidiana de nuestro espacio fue puesta en duda.

Universos bidimensionales

Si hacemos a un lado nuestro sentido común, lo que sabemos (o creemos saber) sobre el espacio puede resumirse más o menos en los siguientes términos: tiene tres dimensiones, es continuo e ilimitado y se ve igual desde todos los puntos y en todas las direcciones. ¿Qué nos dirá todo esto sobre la forma del espacio? Por ejemplo, ¿podremos deducir a partir de estos elementos que el espacio es euclidiano o, al menos, infinito? Las respuestas a estas preguntas son sorprendentes y para entenderlas vale la pena empezar, como acostumbran los matemáticos, con otras más sencillas.

Imaginemos un universo bidimensional, infinitamente delgado, en el que las cosas y los habitantes no tienen ningún

* Le agradezco a la doctora Martha Takane toda su ayuda, ya que sin ella no habría escrito este artículo.

espesor (aquí cabría preguntarse si hay alguna razón lógica que explique por qué nuestro universo y nosotros tenemos tres dimensiones). ¿Qué forma tendría entonces un universo de dos dimensiones, continuo e ilimitado y que se viera igual desde todos sus puntos y en todas las direcciones? Podría tratarse de un plano, en cuyo caso la geometría euclidiana se ajustaría perfectamente a su forma. Pero ésta no es la única posibilidad: también podría tratarse de la *superficie* de una esfera. En la esfera, las trayectorias más cortas entre dos puntos —las que los habitantes de la esfera percibirían como líneas rectas— son en realidad arcos de círculos máximos (como el Ecuador de la tierra) y como todos los círculos máximos en la esfera se cruzan, no hay líneas paralelas. La geometría que describió Riemann es precisamente la geometría de la esfera, cuya característica más notable es que establece un modelo de universo bidimensional *finito* y, sin embargo, ilimitado (independientemente de la distancia que se recorra en la esfera, nunca se llegaría a un borde).

En realidad, los universos bidimensionales pueden tener una infinidad de formas distintas, muchas de ellas fáciles de imaginar desde nuestra perspectiva tridimensional: en lugar de pensar en la superficie de una esfera, podemos pensar en la superficie de una dona o en cualquier otra superficie sin bordes (una superficie con bordes correspondería a un universo limitado, que se terminaría de pronto). Hay que hacer entonces una primera distinción entre los universos infinitos (llamados *abiertos*) y los universos

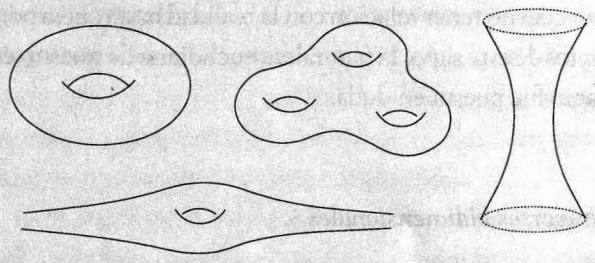


Lámina 1

finitos pero ilimitados (llamados *cerrados*). La lámina 1 muestra dos superficies cerradas: el *toro* (la superficie de una dona) y el triple toro (la superficie de una dona triple), y dos superficies abiertas: una en forma de corneta infinita y la otra de toro que ha sido estirado hasta el infinito en dos direcciones (en el papel no hay suficiente lugar para dibujarlas completas, pero hay que imaginarse que se extienden indefinidamente). La corneta infinita es un ejemplo de superficie donde vale la geometría hiperbólica de Bolyai y Lobachevsky.

Una superficie interesante es la banda de Moebius, que se puede hacer al torcer y pegar los extremos de una tira de papel. La banda de Moebius es una superficie *no orientable*: un viajero bidimensional que la recorriera toda se encontraría con que su lado izquierdo se ha convertido en su lado derecho, y viceversa (la lámina 2 muestra al viajero con la mano derecha alzada todo el tiempo, pero en el recorrido de regreso esa mano se ha convertido en la mano

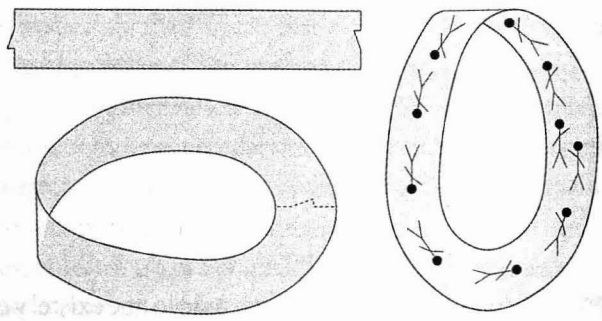


Lámina 2

izquierda). Aunque la banda de Moebius tiene un borde, uno puede intuir que también hay superficies no orientables cerradas y abiertas, pero éstas son más difíciles de visualizar.

Así como nosotros no podemos salirnos del espacio, tampoco los habitantes de una superficie podrían asomarse hacia afuera: todo lo que verían estaría en la superficie misma y lo demás simplemente no existiría. La luz se movería por la superficie siguiendo las trayectorias más cortas, y aunque desde afuera viéramos que estas trayectorias se curvan y se enredan en la superficie, a un observador en la superficie le parecería que la luz se mueve en líneas rectas. Como la impresión del observador sería la de estar viendo en línea recta en todas las direcciones, su *universo visual* (el universo que verían sus ojos, en el supuesto de que su visión fuera ilimitada) sería un plano, por lo que naturalmente pensaría que su universo tiene la forma de un plano.

¿Cuáles serán todas las posibles formas de un universo bidimensional? Si con tres dimensiones podemos visualizar tantas formas distintas, quizás podríamos imaginar muchas otras usando cuatro dimensiones o más. ¿Y cómo podrían distinguirse las distintas formas? El hecho de que el universo visual en todas las superficies sea como un plano sugiere que reconocerlas no ha de ser fácil. Pero antes de hablar de esto debemos ponernos de acuerdo en lo que entendemos por la forma de una superficie.

Forma

La geometría está basada en objetos rígidos y distingue aun las diferencias más sutiles entre las formas, pero a veces esta precisión es excesiva: vistas con cuidado, no hay dos papas en el mundo que tengan la misma forma y, sin embargo, nos gustaría pensar que son esencialmente iguales. Podemos intentar hacer una distinción menos estricta de las formas si pensamos que al deformar ligeramente un objeto su forma no cambia esencialmente.

Decimos que dos objetos tienen la misma *forma topológica* si es posible deformar uno, paulatinamente y sin romper ni pegar nada, hasta llegar a la forma del otro. Para entender la forma topológica, podemos pensar que los objetos están hechos de un material que se puede moldear, comprimir y torcer a voluntad, pero que no puede romperse o pegarse. Es fácil convencerse de que una papa y un plátano tienen la misma forma topológica, pero una papa y una dona no. Con un poco más de imaginación se puede ver que una dona y una taza tienen la misma forma topológica, y también que una azucarera con dos asas y una tetera son topológicamente iguales. La forma topológica puede parecer un concepto vago o subjetivo, pero es en realidad tan riguroso como lo es la forma geométrica.

En topología, las longitudes y los ángulos no tienen ninguna importancia, ya que pueden cambiar cuando se deforman las figuras, y lo mismo puede decirse de las áreas y los volúmenes. La topología es una especie de geometría cualitativa en la que, a cambio de perder los detalles, ganamos una visión clara de las diferencias más profundas entre las formas. Si al pensar en las superficies o los espacios nos interesa reconocer formas básicamente distintas, debemos pensar en su forma topológica.

Rompecabezas

¿Cómo podría un hipotético ser bidimensional imaginarse la forma de la superficie en que habita? Ya que su universo visual sería un plano y en éste no cabe casi ninguna superficie (si lo duda, intente meter una esfera en el plano), es probable que no pueda verla compleya, pero como la superficie se parece *localmente* al plano, si la partiera en pedacitos, como un rompecabezas, éstos parecerían pedacitos del plano, y sí podría verlos. Aunque no pudiera armar el rompecabezas dentro del plano, toda la información sobre la forma topológica de la superficie estaría en la forma de las piezas y la manera de pegarlas (pero la forma geométrica se perdería al aplanar las piezas).

Por ejemplo, la esfera puede partirse en dos hemisferios que pueden aplanarse hasta convertirse en discos (piezas redondas planas), de modo que la esfera tiene la forma topológica de dos discos unidos por sus bordes. Aunque no podamos armar la esfera dentro del plano, podemos imaginarla si pensamos que los discos están unidos "virtualmente", de manera que al movernos dentro de uno de ellos y llegar al borde pasaríamos inmediatamente y sin notar nada al otro disco. Podemos hacer lo mismo con el toro, es decir, cortarlo y estirarlo para obtener una sola pieza cuadrada (lámina 3), de modo que uno puede imaginar al toro al unir virtualmente los lados opuestos de un cuadrado.

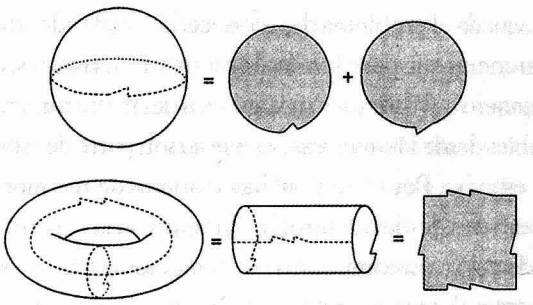


Lámina 3

Todas las superficies son susceptibles de dividirse como rompecabezas, y cualquier rompecabezas que uno invente da lugar a una superficie. Al jugar con rompecabezas uno se topa con sorpresas, ya que algunos, como los de la lámina 4, se resisten a ser armados aun valiéndose de tres dimensiones. Son los correspondientes a las superficies cerradas

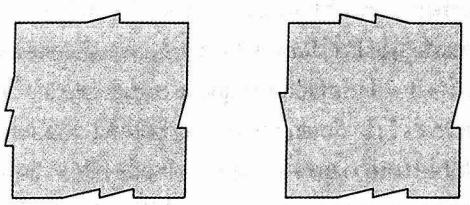
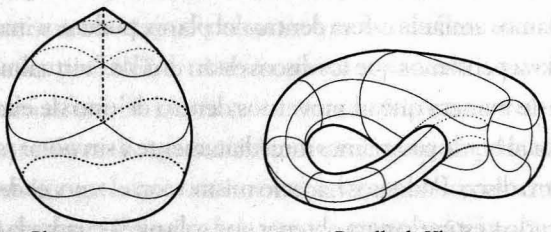


Lámina 4

no orientables más sencillas: el *plano proyectivo* y la *botella de Klein*, que al tratar de apretujarse en el espacio de tres dimensiones irremediablemente se atraviesan a sí mismas, como se muestra en la lámina 5.

Los rompecabezas nos proporcionan una manera de visualizar, sin salir del plano, todas las superficies que pueden existir en cualquier dimensión. Como hay una infinidad de rompecabezas, sería imposible intentar armarlos uno por uno para averiguar todas las formas posibles, pero los topólogos hallaron una manera de simplificarlos todos al

mismo tiempo: recortando las piezas y pegándolas para formar otras distintas, hasta convertirlos en rompecabezas conocidos. Con esta solución mostraron que todas las superficies cerradas tienen la forma topológica de una esfera, de un toro múltiple o de un plano proyectivo múltiple.



Plano proyectivo Botella de Klein

Lámina 5

Una vez que se sabe cómo son todas las superficies cerradas, queda el problema de reconocerlas desde adentro. Las diferencias que percibimos al usar tres dimensiones, como el agujero del toro y los tres agujeros del triple toro, no son visibles desde la superficie, ya que *no* son parte de ésta, sino del espacio. Por fortuna, sí hay maneras de reconocer las superficies desde adentro. Imaginemos una superficie armada como un rompecabezas, llamemos aristas a los bordes entre dos piezas y vértices a los puntos donde se unen las aristas y calculemos el número de piezas menos el número de aristas, más el número de vértices del rompecabezas. Por increíble que parezca, el resultado obtenido, llamado característica de Euler de la superficie, no depende del rompecabezas, sino sólo de la forma topológica de la superficie. Por ejemplo, la lámina 6 muestra la esfera dividida como un rompecabezas con 4 piezas, 5 aristas y 3 vértices, y otro rompecabezas con 5 caras, 8 aristas y 5 vértices, así que la característica de la esfera es $4-5+3$, o sea 2, que es lo mismo que $5-8+5$. Es fácil ver que la característica del plano proyectivo es 1, la de un toro o una botella de Klein es 0, la de un doble toro o una doble botella de Klein es -2, etcétera. La característica y la orientabilidad permiten reconocer desde adentro y sin lugar a dudas todas las superficies cerradas.

Curvatura

Una propiedad geométrica de la forma de una superficie es su curvatura. En términos muy generales, la curvatura de la superficie es 0 en los puntos donde se ve plana, es positiva donde se curva como una esfera y es negativa donde se curva como una silla de montar (lámina 7). Hay superficies cuya curvatura es igual en todas partes, como la esfera o el plano, y otras donde la curvatura varía mucho de un punto a otro, como en la superficie de una papa o de una dona.

Como la curvatura y el área de una superficie que se deforma pueden cambiar mucho sin que se altere su forma topológica, no parecería haber ninguna relación entre ellas. Sin embargo, el teorema de Gauss-Bonnet dice que si calculamos la curvatura promedio de una superficie cerrada, y la multiplicamos por su área, obtendremos la característica de la superficie multiplicada por 2π. ¡Así que la curvatura y el área juntas determinan la forma topológica, salvo por la orientabilidad! Por ejemplo, si el promedio de la curvatura es positivo, entonces la superficie debe ser (topológicamente) una esfera o un plano proyectivo, y si el promedio es 0, entonces la superficie debe ser un toro o una botella de Klein. Para todas las demás superficies cerradas, la curvatura promedio es negativa y la forma depende del área de la superficie. Este teorema ilustra la profunda relación que hay entre la topología y la geometría de las superficies cerradas.

Ya que hay una infinidad de formas posibles de universos bidimensionales, uno puede preguntarse si habrá unas más naturales que otras. Los universos de curvatura constante, como el plano o la esfera, tienen la propiedad de que la visión dentro de ellos es exactamente igual desde cualquier lugar y en cualquier dirección (son homogéneos e isotrópicos), algo que no ocurre con los universos de curvatura

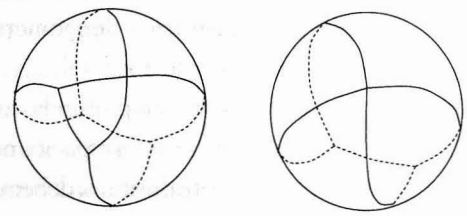


Lámina 6

variable, como la superficie de una dona. A primera vista parecería que la curvatura variable de muchas superficies es una consecuencia de su forma topológica, y que no importa cómo las deformemos, siempre habrá puntos con distinta curvatura. Pero se ha demostrado que cualquier superficie cerrada puede moldearse para que su curvatura sea constante: el plano proyectivo puede moldearse para que su curvatura sea 1, igual a la de la esfera, y el toro y la botella de Klein son susceptibles de moldearse para que su curvatura sea 0, de modo que desde adentro se vean tan planos como un plano. Todas las demás superficies son susceptibles de moldearse para que su curvatura sea -1, de modo que su geometría sea la geometría hiperbólica de Bolyai y Lobachevsky.

Así que todas las formas topológicas de superficies son igualmente naturales como modelos de universos bidimensionales, y las variaciones en la curvatura de cualquier superficie pueden considerarse deformaciones locales en una superficie originalmente homogénea e isotrópica.

Espacios tridimensionales

Una de las consecuencias de la teoría de la relatividad es que nuestro universo no es euclidiano: la gravedad deforma el espacio alrededor de los objetos, curvándolo, y los rayos de luz no siguen líneas realmente rectas porque no las hay. Nuestro sentido común puede hacernos pensar que estas

cero positiva negativa

Lámina 7

deformaciones son locales, como pequeñas olas en la superficie de un estanque, y que no cambian básicamente la forma del espacio, que sería casi euclidiano, o al menos, topológicamente euclidiano. Pero nuestra experiencia con los universos bidimensionales debería hacernos dudar: la forma podría ser muy distinta.

Nuestro espacio parece localmente un espacio euclidiano del mismo modo que una superficie se parece localmente a un plano. Así como podemos visualizar muchas formas radicalmente distintas de superficies usando tres dimensiones, uno puede intuir que hay muchas formas posibles de espacios tridimensionales, tanto cerrados como abiertos, que serían fáciles de imaginar si pudiéramos ver en cuatro dimensiones. La forma más simple de un espacio cerrado es la *esfera tridimensional*, que vista en cuatro dimensiones recuerda a la esfera usual pero con una dimensión más. Por suerte no hace falta ver en cuatro dimensiones para imaginarse esto, ya que podemos usar los rompecabezas. La idea es que como el espacio parece localmente un espacio euclidiano, si lo dividiéramos en pedacitos éstos parecerían pedacitos del espacio euclidiano y podríamos verlos. Si imaginamos que el espacio está hecho de un cristal transparente (en lugar de estar vacío) las piezas del rompecabezas serían bloques de cristal sólido. Aunque no podamos armar completamente el rompecabezas en nuestro universo visual, la forma de las piezas y la manera de pegarlas contienen toda la información topológica de la forma del espacio.

La esfera tridimensional puede partirse en dos hemisferios que aplanados se ven como bolas sólidas en el espacio euclidiano, de modo que la esfera tridimensional tiene la forma topológica de dos bolas de cristal sólidas unidas completamente por el borde. Aunque en el espacio euclidiano no hay suficiente lugar para unirlas, podemos imaginar que están unidas virtualmente y pensar que si nos moviéramos dentro de una de ellas y llegáramos a la orilla, pasaríamos sin notarlo a la otra bola.

Si tomamos un cubo de cristal sólido y unimos sus caras opuestas (de manera análoga a como se hizo con el toro), obtenemos el *toro tridimensional*. Igual que antes, éste sólo puede armarse en el espacio euclidiano de manera virtual y hay que imaginar entonces que al salir por una cara del cubo uno entra sin notarlo por la cara opuesta. La propiedad más notable del toro tridimensional es que su curvatura es 0, a pesar de ser un espacio cerrado. Por lo tanto, aun si nuestro universo no tuviera ninguna curvatura, y valiera localmente la geometría euclidiana, no podríamos afirmar que fuera globalmente euclidiano, ni siquiera que fuera infinito.

Al cambiar la manera de pegar las caras del cubo se obtienen formas distintas de espacios cerrados, incluyendo la esfera tridimensional y el equivalente tridimensional de la botella de Klein, que es un espacio cerrado no orientable. Los espacios no orientables se ven tan comunes como los orientables pero, como sucede en dos dimensiones, un habitante de un universo no orientable que hiciera un largo viaje podría encontrar, al regresar, todo invertido, como si estuviera viendo a través de un espejo (para quienes lo recibieran, sería el viajero quien estaría al revés).

Aunque todos los espacios cerrados pueden armarse con rompecabezas de una sola pieza euclidiana, los rompecabezas tridimensionales han resultado mucho más difíciles de estudiar que los rompecabezas planos. Se da además la circunstancia de que, si bien se puede calcular la característica de Euler de un espacio cerrado, ésta siempre da 0, por lo que no sirve para distinguirlos.

Una infinidad de posibilidades

Lo que distingue a nuestro universo de todos los universos posibles es que el nuestro sí existe.

Alberto Barajas, parafraseando a Leibniz

Después de siglos de intentar argumentar lógicamente que el universo es infinito, ahora parece que los babilonios y

los egipcios no estaban totalmente perdidos: es muy probable que el universo que habitamos sea un universo cerrado. Aunque un candidato natural para la forma de nuestro universo es la esfera tridimensional, hay en realidad muchísimas formas posibles, ya que en principio podría tener la forma de cualquier espacio cerrado.

El universo visual de un observador en cualquier espacio, abierto o cerrado, sería igual al nuestro: un espacio topológicamente euclidiano, sin más distorsión aparente que la que veríamos en un cristal euclidiano de densidad no uniforme. Los indicios sobre la forma verdadera del espacio, en caso de haberlos, serían muy sutiles. Los rayos de luz en un espacio no euclidiano podrían seguir distintas trayectorias entre dos puntos, de modo que quizás podríamos ver dos o más imágenes distintas de un mismo objeto (el problema sería que la luz tuviera tiempo suficiente para recorrer las distintas trayectorias, lo que dependería del tamaño del espacio).

La riqueza de formas topológicas conocidas es inmensa; sin embargo, a pesar de los espectaculares avances en los últimos treinta años, aún no se sabe cuáles son todas las formas posibles como tampoco se sabe con seguridad cómo distinguirlas. Las formas más naturales son, desde luego, las de curvatura constante, en las que la visión sería exactamente igual desde cualquier punto y en cualquier dirección. Se sabe que hay precisamente 10 formas topológicas posibles de espacios cerrados de curvatura constante 0, en los que vale localmente la geometría euclidiana, y que hay una infinidad de espacios de curvatura constante positiva, en los que vale la geometría esférica de Riemann. Pero la colección más grande conocida, y que crece todos los días, está formada por los espacios de curvatura constante negativa, en los que vale la geometría hiperbólica de Lobachevsky y Bolyai.

Además de las tres geometrías de curvatura constante (esférica, hiperbólica y euclidiana), hay otras cinco geometrías tridimensionales que son homogéneas pero no isotrópicas: la visión depende de la dirección en que miremos, y esta distorsión de la visión no puede corregirse al moldear los espacios, ya que es una consecuencia de la forma topológica, que tiene direcciones preferentes. Una de las conjeturas más prometedoras en la topología de los espacios es la de la geometrización, que predice que a cada forma topológica cerrada debería corresponderle una forma geométrica natural, que sería una combinación de formas homogéneas, de modo que estas ocho geometrías bastarían para describir la forma de cualquier espacio, salvo deformaciones locales.

En el caso de que se llegara a demostrar la validez de la conjetura de la geometrización, se estaría muy cerca de conocer todas las formas topológicas posibles de espacios cerrados y también se sabría —al menos teóricamente— cómo reconocerlas, pues todas las formas básicas desconocidas serían hiperbólicas. El universo visual de un espacio de curvatura negativa es lo que se conoce en matemáticas como la *cubierta universal* del espacio, por lo que fijándose en todas las imágenes visibles de un mismo objeto es posible construir un rompecabezas del espacio, y a partir de éste se puede averiguar la forma del espacio.

El universo de las matemáticas

El campo de juego de las matemáticas es, en cierto sentido, mucho más grande que el de otras ciencias, ya que no está restringido a la realidad: los universos matemáticos pueden tener cualquier número de dimensiones (¡aun infinitas!). El carácter deductivo de las matemáticas hace que sus únicos límites sean la imaginación y las leyes de la lógica. Pero, ¿qué sentido tiene estudiar cosas que quizás no existen? El hecho de que las matemáticas sean independientes de la realidad les da el poder de adelantarse a ésta: las geometrías no euclidianas no sólo fueron desarrolladas mucho antes de que se sospechara que nuestro universo no es euclidiano, sino que fueron fundamentales para hacer este descubrimiento. Y en la actualidad, una de las teorías físicas en boga plantea que nuestro universo no tiene tres dimensiones, ni siquiera cuatro contando el tiempo, sino 10, seis de las cuales estarían tan estrechamente curvadas que no las podríamos ver... ◆

Lecturas recomendadas

Bracho, Javier, *¿En qué espacio vivimos?*, FCE (Col. La ciencia desde México, núm. 77), México, 1989.

Einstein, Albert, *La teoría especial y la teoría general de la relatividad*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

Hawking, Stephen, *Historia del tiempo ilustrada*, Crítica, Barcelona, 1996.

Kasner, Edward y James R. Newman, *Matemáticas e imaginación*, Salvat, Barcelona, 1987.

Poincaré, Henri, *La ciencia y la hipótesis*, Espasa Calpe, Madrid, 1963.