Aquiles, la tortuga, Einstein y otras historietas

Paradojas en diferentes ámbitos

◆

MICHAEL BAROT

1. *Paradojas para meditar*

Una paradoja es, según el diccionario, una contradicción. Frases como "El que más tiene es el más pobre" o "La versión más corregida es normalmente la menos correcta" parecen contradictorias, pero es esta contradicción aparente la que nos fuerza a reflexionar más, y así revela un sentido más profundo: la paradoja es una figura retórica.

La misma técnica fue (o todavía es) empleada en la escuela del budismo zen, pero ahí no sólo como un truco retórico. En el budismo zen se hace hincapié en la meditación como el camino hacia el reconocimiento inmediato de la realidad. Surgida a partir del budismo hindú, esta escuela pasó por China y llegó a Japón alrededor del año 600. Sin embargo pasaron quinientos años para que esta escuela se volviera importante. Esto se debió a la labor de dos monjes que, en la búsqueda del verdadero camino hacia la iluminación, visitaron China y de regreso empezaron a enseñar un sistema que se basó estrictamente en la meditación. Dentro de este sistema el *koan*, que presenta un dilema mental, fue usado como elemento que trata de agotar el razonamiento analítico y la voluntad egoísta. Tal vez el ejemplo más conocido de un *koan* es:

> Si dos manos dan una palmada producen un sonido; escucha el sonido que produce una sola mano.

En muchas ocasiones el *koan* tiene la forma de un cuento, por ejemplo:

> El maestro Hyakujo quería mandar a un monje a abrir un nuevo monasterio. Por ello dijo a sus alumnos que encargaría la labor a quien pudiera responder mejor la siguiente pregunta. Puso un jarrón con agua en el suelo y preguntó: "¿Quién me puede decir qué es esto sin usar su nombre?" El monje superior dijo: "Nadie puede llamarlo un zapato." Isan, el cocinero, tiró el jarrón con el pie y salió. Hyakujo sonrió y dijo: "El monje superior pierde." Así, Isan se volvió abad del nuevo monasterio.

¿Por qué con un *koan* se quiere agotar el razonamiento analítico? Según el budismo zen, el mayor impedimento para la iluminación es que las palabras dividen al mundo en partes. *Bueno* lo divide en cosas *buenas* y cosas *malas*. Hay una variedad de *koans* que muestran la lucha contra las palabras, contra la confianza en las palabras, la fragmentación del mundo en categorías. Por ejemplo:

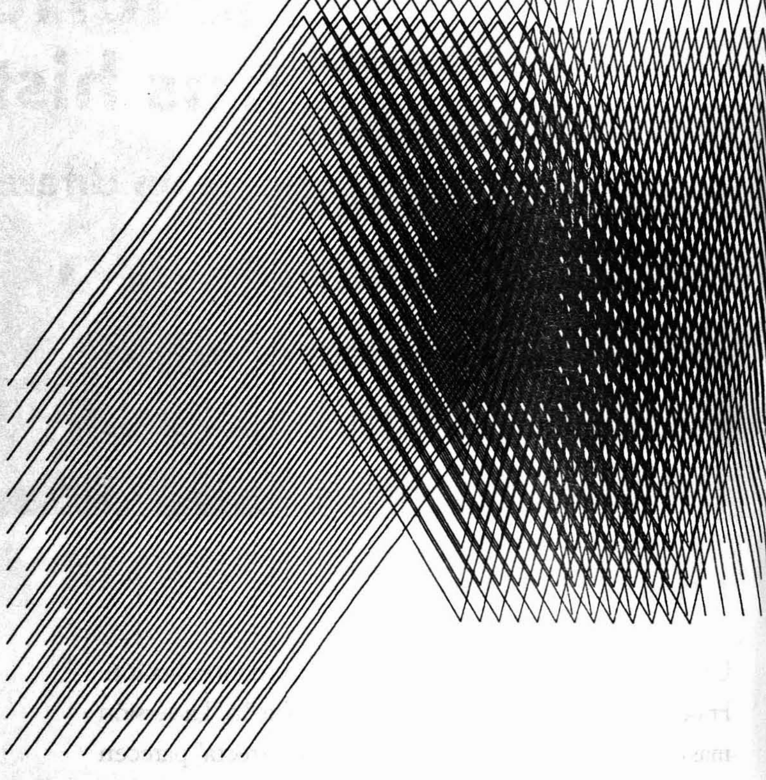
> Shuzan alzó su bastón corto y dijo: "Si llaman a esto un bastón corto, se oponen a la realidad. Si no lo llaman un bastón corto, ignoran los hechos. ¿Cómo lo quieren llamar entonces?"

¿Por qué nos oponemos a la realidad cuando lo llamamos un bastón corto? Tal vez, porque con esas dos palabras decimos demasiado poco, quedamos en la superficie pero creamos la apariencia de capturar la realidad. Si, por otro lado, no lo llamamos un bastón corto, ignoramos uno de sus aspectos. "No se puede decir con palabras, pero tampoco se puede decir sin palabras" es el comentario de Mumon, maestro zen chino de aquella época.

Tengo que admitir que no he podido resolver ningún *koan*. Hace poco fui a visitar a mi hermano que vive en Japón. Como no había tenido tiempo de informarme sobre este país, me compré el libro *Lost Japan* al transbordar en

Los Ángeles. El autor, Alfred Kerr, es un estadounidense que, según la breve biografía del libro, fue a Japón por primera vez con sus padres cuando todavía era un niño y desde entonces le fascinaron las culturas orientales. El libro se erigió en mi acompañante fiel y me enseñó aspectos que no hubiera podido ver sin él. Además de describir con gran arte la ruptura que se produjo en el Japón con la importación de la cultura estadounidense, también escribe acerca de las relaciones amistosas que entabló en Japón. Así, cuenta que con mucha insistencia logró que un amigo iniciado en el budismo zen le descubriera la solución del *koan* del sonido de una mano. Alfred Kerr no escribe la solución, sólo menciona que es sorprendentemente sencilla.

Un *koan* contiene normalmente algo paradójico que contradice nuestro *sentido común* (más adelante veremos más paradojas de este tipo). Lo enigmático de un *koan* nos estimula, aunque tal vez no logremos resolverlo (también este rasgo lo reencontraremos más tarde en otras situaciones).



2. *Paradojas en la antigua Grecia*

El método de exponer dos puntos de vista opuestos o competitivos ha sido empleado con diferentes intenciones desde muy temprano en la historia de la humanidad. En efecto, Parménides, que nació alrededor de 515 a. C., argumentó que no puede haber nada que no exista, que los fenómenos de la naturaleza son errores de la percepción humana y que no tienen existencia propia, la cual sólo asignó a un *ser absoluto*. Así, el movimiento es imposible, ya que, para que un objeto se mueva, debe existir antes un espacio vacío que pueda ocupar el objeto después del movimiento. Su alumno preferido era Zenón de Elea que inventó paradojas muy ingeniosas para defender la posición de su maestro. Así argumentó Zenón:

> Aquiles (el héroe más rápido) y una tortuga compiten en una carrera. Aquiles le da a la tortuga una ventaja de un estadio (más o menos 185 metros). Empiezan al mismo tiempo la carrera. Antes de alcanzar a la tortuga, Aquiles tiene que llegar al punto en donde estaba la tortuga cuando empezó la carrera. Pero en el tiempo que necesita para llegar ahí, la tortuga avanza y está más adelante. Otra vez, para que Aquiles alcance a la tortuga, tiene que llegar primero al punto en donde está ahora la tortuga y mientras tanto la tortuga avanza. Es claro que este "juego" se tiene que repetir un número infinito de veces. Cada vez que Aquiles llega al punto en donde estaba la tortuga, ésta ya avanzó otro poco. Por eso Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

Si confrontamos la argumentación de Zenón con nuestro sentido común, que nos dice que el movimiento existe, tenemos una paradoja. Pero no podemos suponer simplemente lo que nos dice nuestro sentido común, pese a lo convincente que nos parezca, ya que Zenón tiene una argumentación mientras que nuestro sentido común no. Tenemos que entrar en discusión con Zenón y encontrar el punto débil. Eso lo haremos en el siguiente capítulo. Zenón inventó una variedad de paradojas con las cuales quería demostrar que no puede haber movimiento, que el ser no se puede dividir en partes y que no puede haber espacio. Era el tiempo en el cual en toda Grecia surgieron pensamientos importantes. Los griegos se habían defendido de los persas con éxito y la gente de la clase alta vivía con gran lujo. La democracia se había establecido y el futuro se planificaba mediante asambleas en las cuales los hombres libres (mujeres y esclavos no tenían derechos políticos) podían hablar y opinar. Obviamente, los que podían argumentar con más claridad tenían la ventaja, y esto dio origen a los sofistas, maestros de la retórica, que viajaban de lugar en lugar para enseñar por buen dinero el arte de convencer a los demás. Los sofistas no eran filósofos, sino más bien gente práctica que valoraba los conocimientos teóricos por mucho menos que el éxito en la discusión. Según ellos, la moral y la verdad eran cuestión de opinión. Protágoras, el sofista más reconocido (y tal vez más criticado), viajó por toda Grecia y de él se cuenta la siguiente leyenda:

> Protágoras enseñó a uno de sus discípulos. Éste le dijo que sólo podía pagarle después de haber ganado su primer caso. El discípulo estudió y cuando estuvo listo esperó para atender clientes. Protágoras, impaciente por obtener su dinero, lo demandó ante un tribunal y argumentó de la siguiente manera: "Si gano, tendré mi dinero por el fallo del tribunal y si pierdo, ganará mi discípulo y me tendrá que pagar como quedamos." El discípulo opuso que no tendría que pagar nada, ya que si ganaba, no tendría que pagar por el fallo del tribunal y si perdía, no tendría que pagar porque acordaron que sólo le pagaría después de ganar el primer caso.

Se dice que el tribunal nunca llegó a una decisión final (¿qué decidiría el lector? La solución de esta paradoja se deja a los malabaristas mentales).

Ambas paradojas, la de Zenón y la de la leyenda, resultan ingeniosas si se piensa en la época en que fueron elaboradas (500 a. C.), aunque son muy diferentes en sus intenciones. Sócrates, cuando era joven, escuchó a Parménides en Atenas. Platón, que pone a Sócrates como figura central en casi todas sus obras, ataca tanto a los sofistas como a Parménides y a Zenón en sus obras.

3. *Sobre lo infinito*

La paradoja de Zenón se basa en un argumento sobre *lo infinito*. En 1851 se publicó *Paradojas del infinito* de Bernardo Bolzano, un matemático checo; sin embargo, el libro quedó en el olvido durante mucho tiempo. En él, Bolzano aclara que muchas paradojas en las matemáticas recurren implícita o explícitamente a la noción del infinito y por ello trata de aclarar esta noción. Bolzano muestra que una parte de un conjunto infinito puede ser igual de *grande* que todo el conjunto (esto ya lo había observado Galileo) y la manera como lo demuestra anticipa ya el trabajo de Georg Cantor, quien introduce treinta años después la noción de *cardinalidad*, que es el término técnico para el *tamaño* de un conjunto.

> Un hotel con infinitos cuartos (enumerados por 1, 2, 3, 4,...) está completamente ocupado. Sin embargo, cuando llega un nuevo huésped, el hotelero dice: "No hay problema, siempre tengo un cuarto libre."

Pronto veremos cómo se resuelve esta paradoja. En el tiempo de Bolzano, un *conjunto* era simplemente una colección de objetos con la propiedad de que podía decidirse si un *objeto pertenecía* a esta colección o no.

Un conjunto es *finito* si sólo tiene un número finito de objetos, de lo contrario se dice que es *infinito*. Si hay dos bolsas con granos de café y queremos saber cuál contiene más granos, sólo tenemos que contar los granos de cada una de las bolsas y comparar los dos números de nuestro conteo. El proceso es fácil porque en cada bolsa sólo hay un número finito de granos. Pero, si tenemos que "contar" los objetos de un conjunto infinito, ¿cómo lo haremos? ¿Son dos conjuntos infinitos siempre igual de grandes?

Hay una manera de comparar el número de granos en las dos bolsas sin que sea necesario contar los granos: sacamos de cada bolsa un grano y lo dejamos afuera. Luego sacamos otra vez de cada bolsa un grano y también lo dejamos afuera. Si procedemos así, llegaremos (tal vez después de horas) al punto en que una de las dos bolsas quede vacía y solamente tendremos que checar si en la otra bolsa todavía hay granos o no. Con este procedimiento no es necesario saber el número exacto de granos en cada bolsa. Si las dos bolsas tienen el mismo número de granos obtenemos una correspondencia *uno a uno* entre los granos de una bolsa y los de la otra: al primer grano de una bolsa corresponde el primer grano de la otra bolsa, al segundo grano de una bolsa le corresponde el segundo grano de la otra bolsa. Luego se corresponden los terceros granos, los cuartos y así sucesivamente.

Una *función* es una instrucción que describe cómo obtener de un número dado x, el *argumento*, un nuevo número y, el *valor*, que está determinado completamente por x. Así, por ejemplo, $y = x + 1$ es la instrucción "aumentar el número dado por 1" y $y = 2 \cdot x$ es la instrucción "multiplicar el número dado por 2".

Denotamos por N al conjunto de los números 1, 2, 3, 4,... y con N_2 al conjunto de los números 2, 3, 4, 5,... Claro, N_2 es una parte de N. Nuestro sentido común nos dice que, por lo tanto, N es *más grande* que N_2. Sin embargo, la función $y = x + 1$ establece una correspondencia uno a uno entre los dos conjuntos infinitos (véase la figura 1).

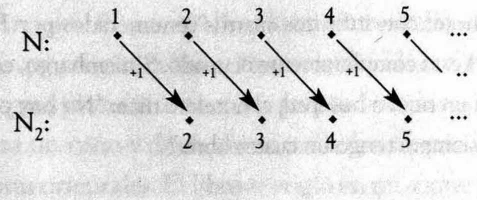


Figura 1

Así se resuelve la paradoja del hotel: el hotelero manda a cada huésped al siguiente cuarto y así queda libre el cuarto con el número 1.

Los números *reales* forman un conjunto que se puede pensar como una línea recta e infinitamente extendida. Los números reales que son mayores o iguales a 0 y menores o iguales a 5 forman un *intervalo* que se denota por [0,5]. Este intervalo es un conjunto infinito; por ejemplo, los números 4, 4.1, 4.11, 4.111 etcétera pertenecen todos ellos a este intervalo.

Bolzano muestra, intuyendo ya la noción de Cantor, que [0,5] (los números mayores o iguales a 0 y menores o iguales a 5) es *igual de grande* que [0,10]. Nuestro sentido común nos dice que [0,10] es lo *doble de grande* que [0,5] pero la función $y = 2 \cdot x$ establece una correspondencia uno a uno entre los dos intervalos (véase la figura 2).

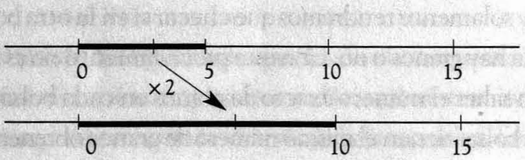


Figura 2

El argumento constituye una paradoja tomando en cuenta nuestro sentido común, que nos indica que [0,10] es más grande que [0,5]. La paradoja se resuelve en cuanto fijamos una noción consistente en comparar el "tamaño" de dos conjuntos y se resuelve en contra de nuestro sentido común.

Los matemáticos alemanes Georg Cantor y Richard Dedekind, que son considerados como los fundadores de la teoría de los conjuntos, se encontraron por casualidad en 1872 en Suiza. Con este encuentro empezó una correspondencia entre ellos que da fe del logro antes mencionado. Cantor demostró que hay más números reales que *naturales* (los números naturales son 0, 1, 2, 3,...) y mandó su argumento a Dedekind, quien lo simplificó. Después, Cantor mandó una demostración a Dedekind de que el conjunto de los puntos que se encuentran en un lado de un cuadrado tiene el mismo "tamaño" que el conjunto de todos los puntos del mismo cuadrado (véase la figura 3).

Figura 3

Dedekind mostró que el argumento de Cantor era incompleto y se lo escribió. El argumento que hoy se usa se le asigna a Giuseppe Peano, matemático italiano. Sin embargo, la teoría de los conjuntos pronto se encontró en apuros a consecuencia de diversas paradojas; Cantor mismo encontró una de ellas en su teoría en 1895. La profundidad de los problemas de la teoría fue evidente cuando en 1901 Bertrand Russell, filósofo y matemático inglés, descubrió una paradoja sencilla que desde entonces se llama simplemente *paradoja de Russell.*

Todos los conjuntos forman una colección bien definida. Si C denota al conjunto de todos los conjuntos, observamos que C es un objeto de C, es decir, el conjunto se contiene a sí mismo como uno de sus objetos. Si un conjunto se contiene a sí mismo, lo llamaremos *extraño*. Sea ahora E el conjunto de todos los conjuntos que no son *extraños*.

Nos podemos preguntar si el conjunto E es extraño o no. Si es extraño, entonces contiene a E como objeto. Pero, como hemos dicho, los conjuntos que pertenecen a E no son extraños, así que E no es extraño. Empezamos nuestro argumento con *si E es extraño* y lo terminamos con *así que E no es extraño*; eso es una contradicción.

Si E no es extraño entonces E pertenece a la colección de los conjuntos que no son extraños. Pero esta colección la habíamos denotado con E, así que E pertenece a E o, dicho de otro modo, E es extraño. Otra vez encontramos una contradicción.

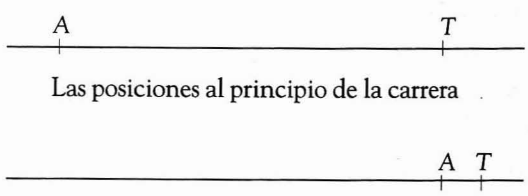
En todos los casos encontramos una contradicción: si E es extraño y si E no es extraño. Entonces E no puede ser ni extraño ni no extraño. Así que E no es un conjunto (recuerdo que habíamos dicho que de un conjunto siempre se puede decidir si un objeto le pertenece o no). Ésta es la paradoja.

La publicación de la paradoja en 1903 por Russell y Gottlob Frege, un matemático alemán que trató de basar la aritmética en la lógica y que se había dedicado a estudiar las ambigüedades del idioma, provocó una crisis profunda entre los matemáticos. Frege dejó de publicar para siempre al no poder resolver la paradoja. Ésta había atacado el núcleo del sistema teórico de Frege, gracias al cual había logrado capturar con rigor *fórmulas* y *demostraciones* como objetos matemáticos tan bien definidos como los números.

Lo que había encontrado Russell era una antinomia, es decir, una contradicción en un sistema que no puede resolverse dentro del mismo sistema. Había que modificar la teoría de los conjuntos. En 1909 Russell presentó su teoría de tipos y Ernest Zermelo, matemático alemán, su sistema axiomático para la teoría de conjuntos. El problema es tan profundo que estimuló la lógica y otros campos de las matemáticas. La paradoja de Russell, que se basa en la *recursividad* de las nociones, se parece, en el fondo, a la vieja *paradoja del mentiroso*:

A: "Lo que digo es falso".

Como habíamos dicho, la paradoja de Zenón contra el movimiento se basa también en la noción del infinito. Para Zenón no era posible partir una cosa (espacio o tiempo) en un número infinito de partes. Si suponemos que pasan 10 segundos entre el momento en que Aquiles empieza la carrera y está por primera vez donde estaba la tortuga, pasará menos tiempo hasta que esté en el punto P (véase la figura 4: A denota la posición de Aquiles, T, la posición de la tortuga), digamos 1 segundo. Para el siguiente paso necesitará $\frac{1}{10}$ de segundo, para el siguiente sólo $\frac{1}{100}$ de segundo y así sucesivamente.



Las posiciones al principio de la carrera

Las posiciones después de 10 segundos

Figura 4

En total pasarán

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots = 11.11111\ldots$$

segundos —un tiempo finito para que Aquiles alcance a la tortuga—. Es cierto que tendré que dibujar un número infinito de dibujos, pero también tendré que dibujar cada vez más rápido (diez veces más rápido que la vez anterior), así que transcurre solamente un tiempo finito.

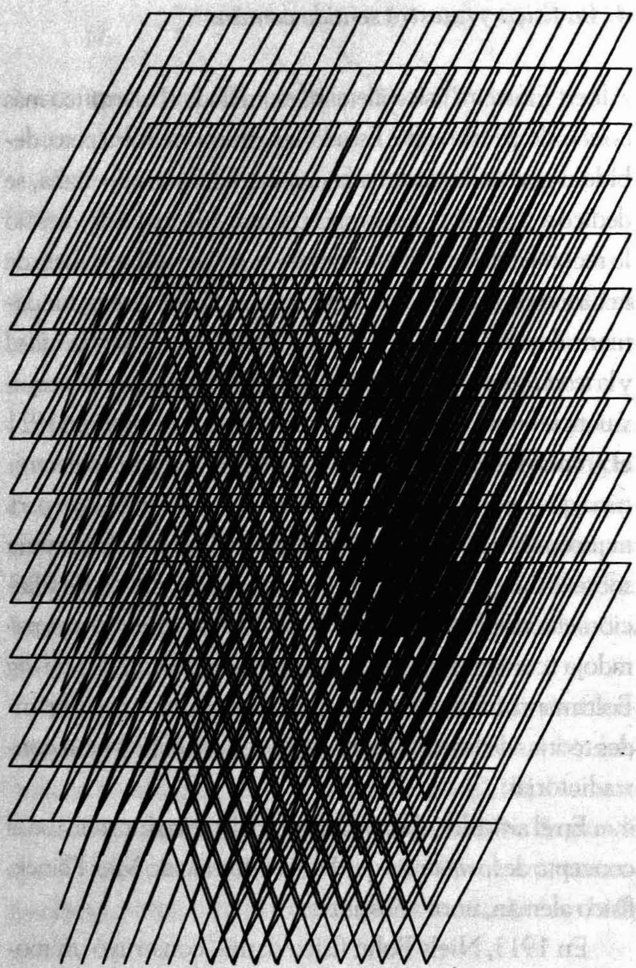
4. *La física y nuestro sentido común*

Albert Einstein, físico alemán, es sin duda el científico más conocido de este siglo. Estudió su carrera en Suiza pero, debido a que no le gustaba la manera como se enseñaba, se dedicó a estudiar por su propia cuenta. Así, los profesores no lo recomendaron para un puesto y tuvo que trabajar fuera de la Universidad para mantenerse. Fundó dos teorías fundamentales de la física actual: la *teoría especial de la relatividad* y la *teoría general de la relatividad* (en la última expone la equivalencia entre masa y energía). Sin embargo, recibió en 1921 el premio Nobel por un artículo sobre el efecto fotoelectrónico que había publicado en 1905 mientras trabajaba para mantenerse. El artículo contiene una idea revolucionaria sobre la naturaleza de la luz (o, más en general, de la radiación electromagnética). Con esta idea se resolvió una paradoja (conocida como la *catástrofe ultravioleta*) de Ludwig Boltzmann, matemático austriaco, que mostró que las grandes teorías de la física hasta entonces conocidas eran contradictorias.

En el artículo sobre el efecto fotoeléctrico Einstein usó el concepto de los *quantos* que había introducido Max Planck, físico alemán, unos años antes.

En 1913, Niels Bohr, físico danés, construyó un modelo de átomo; la existencia del átomo había sido asegurada dos años antes por los experimentos de Ernest Rutherford, físico inglés. Durante los siguientes doce años, científicos como Louis-Victor Broglie (francés), Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger y Wolfgang Pauli (alemanes) elaboraron un modelo matemático sobre el mundo de las partículas con predicciones que correspondían correctamente con los experimentos. En 1935, más o menos empezó a consolidarse la teoría de la mecánica cuántica, aunque aún provocaba dudas pues, si bien sus fundamentos estaban establecidos y aceptados, la interpretación de lo que habían creado los físicos no era clara. Sus consecuencias contradicen en varios aspectos nuestro sentido común, que está acostumbrado a un mundo "clásico" de objetos grandes.

Einstein nunca terminó de aceptar esta teoría en cuyo nacimiento él mismo había colaborado. En discusiones con Niels Bohr intentó encontrar contradicciones en ella. Bohr se había convertido en el centro de intercambio de opiniones e interpretaciones durante el desarrollo de la teoría por su manera flexible y abierta de tratar los diferentes y aparentemente paradójicos resultados que arrojaban los nuevos conocimientos. En la fase de consolidación de la mecánica cuántica, Einstein otra vez se destacó como gran



pensador. Ya convencido de que la teoría cuántica era consistente (sin contradicciones), desarrolló una paradoja que publicó en 1935, junto con Boris Podolski y Nathan Rosen, y que ahora lleva sus nombres. Einstein era famoso por sus *experimentos mentales*, experimentos que no se hacen de verdad, sino sólo se piensan.

La explicación de la paradoja de Einstein, Podolski y Rosen nos llevaría a demasiados detalles técnicos de la teoría cuántica. Sólo podemos dar una idea vaga de ella. El lector interesado podría encontrar una exposición detallada en el libro *Aufbau der Physik* de Carl Friedrich Weizsäcker, físico alemán, o más brevemente en el libro *The Emperor's New Mind* de Roger Penrose, físico-matemático inglés.

Lo que nos dice la paradoja de Einstein, Podolski y Rosen es que la hipótesis de una realidad objetiva es incompatible con la teoría cuántica. La hipótesis de una realidad objetiva afirma que lo que medimos (el lugar en donde se encuentra una partícula o su velocidad) es así en el momento previo a la medición. Por ejemplo, si tenemos que una partícula se encuentra a dos metros de distancia de una muralla, suponemos entonces que la partícula estaba ahí en el momento previo a la medición de la distancia entre ésta y la muralla. La hipótesis de una realidad objetiva parece natural. Pero la teoría cuántica afirma que esta hipótesis es falsa; lo que medimos y la manera como lo medimos influye en el resultado de la medición. Éste es el punto que aclararon Einstein, Podolski y Rosen con su paradoja. Todas las teorías anteriores pusieron al observador fuera del experimento, como algo ajeno; la teoría cuántica lo incluyó como parte imprescindible. Por ello, la teoría enfrentó una crítica dura y hasta hoy no deja de extrañar a los físicos. Einstein no quería aceptar la teoría como definitiva, sólo la vio como algo temporal que más tarde tendría que ser reemplazada por una mejor.

Sin embargo, la teoría está ahora entre las más exitosas de la historia al hacer posible los microscopios electrónicos, el láser y la tomografía, entre muchos otros inventos técnicos. Hoy en día tenemos más elementos para rechazar la hipótesis de una realidad objetiva y aceptar la teoría cuántica. La naturaleza no siempre se comporta como nuestro sentido común espera. Ésa es una *lección* que nos enseñó la física moderna.

La siguiente paradoja, que, para su comprensión, requiere menos conocimientos especializados, trata otro aspecto interesante de la naturaleza.

Planteamiento:

Un maestro dice a sus alumnos: "En la siguiente semana presentarán un examen, pero no sabrán con anticipación el día que va a ser." Pregunta un alumno: "¿No lo sabremos ni en la mañana del día del examen?", y el maestro responde: "Ni en esa mañana."

Argumentación lógica: (no se puede llevar a cabo el examen).

El examen no se podrá aplicar el último día de la semana, el viernes, ya que los alumnos lo sabrían en la mañana. Entonces tendrán que hacerlo entre el lunes y el jueves. Pero, siguiendo el mismo argumento, el día del examen no puede ser el jueves. Así que sólo quedan lunes, martes y miércoles. Tampoco el miércoles con el mismo argumento, y así sucesivamente. Así que no podrá hacerse el examen nunca.

Evidencia: (el examen se puede hacer).

Si el maestro aplica el examen el miércoles, los alumnos no lo sabrán con anticipación.

El maestro hace dos afirmaciones:

a) En la siguiente semana tendrán un examen.

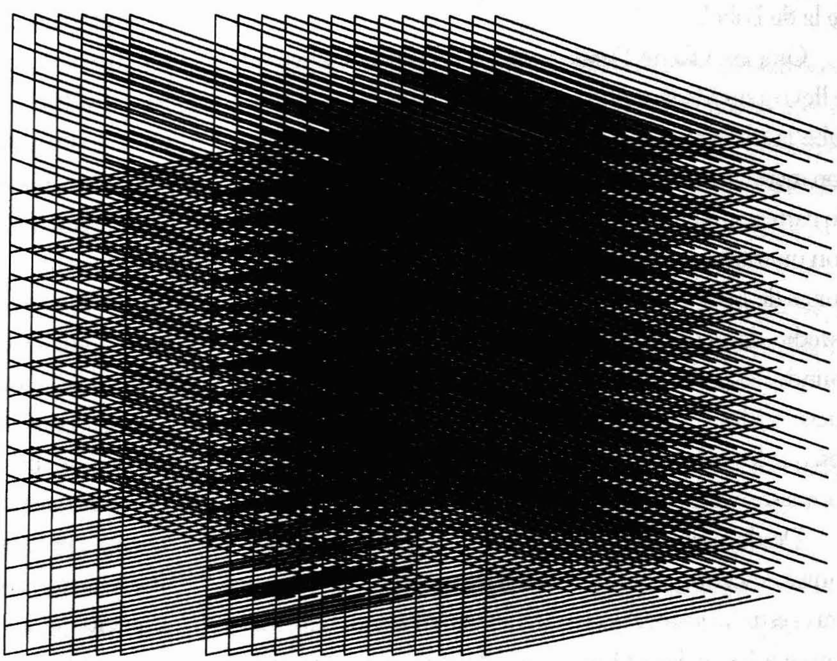
b) No sabrán con anticipación cuándo va a llevarse a cabo el examen.

La paradoja consiste en la oposición entre una argumentación lógica, que muestra que las dos afirmaciones no pueden ser ciertas al mismo tiempo, y la evidencia, que muestra que sí pueden resultar ciertas las dos.

La solución de la paradoja es la siguiente: las afirmaciones sobre el futuro tienen la característica de ser *probables* pero no *seguras* (o *verdaderas* o *ciertas*). Las afirmaciones del maestro constituyen pronósticos sobre el futuro y, por lo tanto, tienen cierta probabilidad de resultar verdaderas y cierta probabilidad de resultar falsas. Tenemos la tendencia de equiparar probabilidades que son muy altas con *certeza* o *seguridad*. La argumentación lógica antes expuesta se basa en que las dos afirmaciones del maestro (*a* y *b*) son ciertas de antemano, es decir, al principio de la semana, y así conduce a una conclusión errónea. La evidencia sólo muestra que las dos afirmaciones (*a* y *b*) *pueden* resultar ciertas.

Si suponemos que el maestro elige el día del examen al azar (por ejemplo, con un dado), de modo que cada día tenga la misma probabilidad de ser el del examen, podemos ver que hay veinte por ciento de probabilidad de que sea el viernes y los alumnos sepan esa mañana que ese día será el examen. Es decir, hay veinte por ciento de probabilidad de que las afirmaciones del maestro no resulten ciertas.

Quien toma pronósticos por falsos o verdaderos no podrá explicar las consecuencias lógicas con su sentido común. La teoría de probabilidades formaliza en este caso el sentido común y le da una base sólida. El modelo físico sobre la naturaleza del futuro se expresa en términos de los pronósticos, los cuales presentan la característica de ser probables.



5. *Notas finales*

Tal vez haya quien considere que las paradojas son algo molesto, que se inventan sólo para trastornarnos la vida. Opino lo contrario. Las paradojas tienen el efecto de hacernos pensar y reflexionar sobre nuestros conocimientos. Gracias a este tipo de reflexiones podemos llegar a un entendimiento más profundo. Como consecuencia, tal vez tengamos que abandonar teorías completas, o quizás podamos resolver la paradoja. En ambos casos obtendremos un conocimiento más amplio.

Además, las paradojas suelen ser catalizadores del desarrollo científico. La contradicción induce a la reflexión y estimula el pensamiento. Parménides y Zenón forzaron a otros pensadores a argumentar mejor; las paradojas iniciales en la teoría de conjuntos estimularon la lógica; las paradojas alrededor de la teoría cuántica provocaron una reflexión sobre la naturaleza de nuestro mundo que todavía no ha acabado. ◆

Bibliografía

Capelle, Wilhelm (ed.), *Die Vorsokratiker*, Alfred Kröner Verlag, 1968.

Dieudonné, J., *Geschichte der Mathematik 1700-1900*, Friedr, Vieweg & Sohn Verlag, 1985.

Hofstadter, Douglas R., *Gödel, Escher, Bach*, Tusquets Editores, 5ª ed., 1995.

Penrose, Roger, *The Emperor's New Mind*, Vintage, 1990.

Platón, *Diálogos*, Porrúa, 1996.

Störig, Hans Joachim, *Kleine Weltgeschichte der Philosophie*, Fischer Taschenbuch Verlag, 1987.

Straumann, Norbert (ed.), *W. Pauli: Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, Springer Verlag, 1990.

Weizsäcker, Carl Friedrich von, *Aufbau der Physik*, Carl Hanser Verlag, 1986.