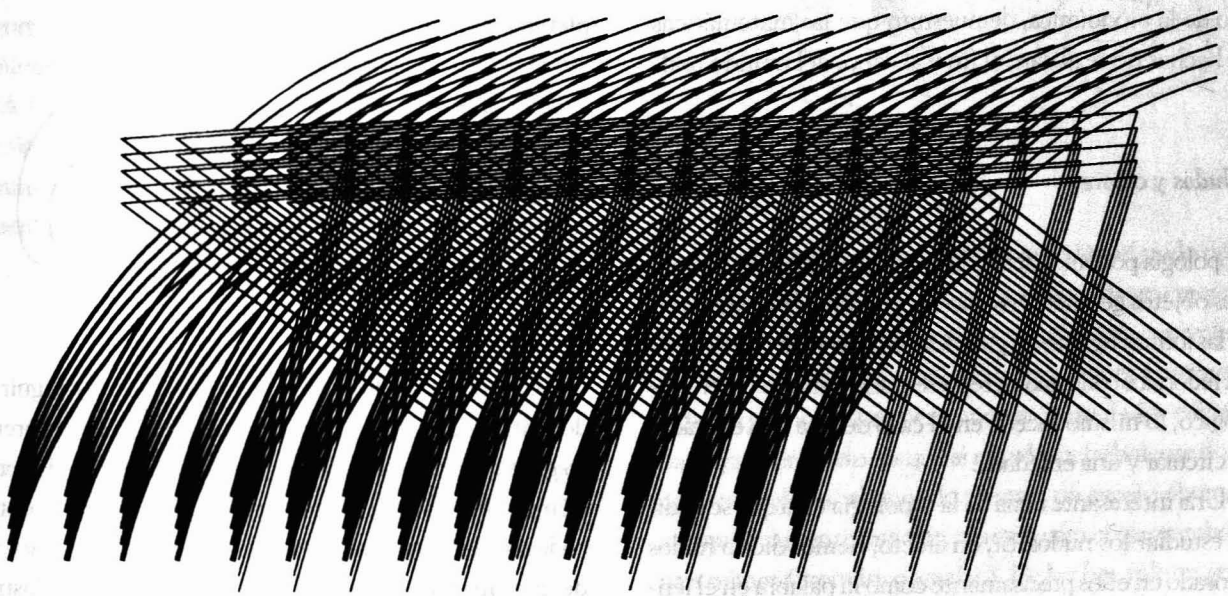
Nudos, enlaces y realidad

CARLOS PRIETO



1. Introducción

Las matemáticas deben una parte de su desarrollo a problemas que el mundo real plantea, problemas que al modelarlos matemáticamente crean teorías que se integran al acervo de conocimientos científicos de la humanidad. Sin embargo, hay otra parte no menos importante de las matemáticas que surge de la investigación per se, es decir, surge de la búsqueda que dentro del vasto universo de conceptos abstractos hacen los matemáticos. No obstante su origen, esta parte ha probado con creces que es tanto o más importante que la primera.

Las matemáticas son ciertamente un lenguaje, diríamos, tal vez el lenguaje en el que está escrito el mundo; también son una herramienta, sin la cual la ingeniería, la física y tantas otras disciplinas del conocimiento humano no podrían siquiera existir; son asimismo una ciencia que plantea sus propios problemas y tiene su forma particular de abordarlos, muchas veces, incluso, en forma experimental; y son también un arte que, al exigir del cerebro humano creatividad suprema, pueden hundirlo en profunda desesperación o proporcionarle enorme satisfacción. Son, por esto último, también una forma de vida, una estructura del pensamiento, una invitación a penetrar en un mundo de ideas y conceptos propios de las mismas matemáticas, en el que pueden hacerse los más asombrosos descubrimientos. Podría pensarse que este carácter conlleva el riesgo de alejar las matemáticas cada vez más del otro mundo, del mundo real, mas no es así. En muchas ocasiones hay ideas, teorías, conceptos matemáticos que repercuten contundentemente en otras disciplinas años después de haber sido creados. Es a lo que se le ha llamado la insensata eficacia de las matemáticas (véase Wigner).

En este trabajo se hará alusión a una teoría, más por su belleza intrínseca que por su eficacia al aplicarla, sin embargo, a algunas de sus importantes aplicaciones también

nos referiremos. Es momento éste para acentuar el hecho de que no es la topología la única que se utiliza en tales casos, sino que en esta incursión en las fronteras del conocimiento la acompañan otras áreas de las matemáticas, como el álgebra, la combinatoria, la teoría de las categorías, el análisis, la estadística, etcétera. Esto es un reflejo de que la matemática, lejos de estar conformada por parcelas más o menos aisladas, constituye un edificio completamente interconectado; en otras palabras, las matemáticas son una sola ciencia y no un conglomerado de áreas.

Las aplicaciones de la topología, en compañía de otras de las ramas mencionadas, en algunas áreas de la física teórica o de la bioquímica, demuestran que las matemáticas bien hechas no se alejan, al fin y al cabo, del mundo real.

2. *Nudos y colores*

La topología podemos definirla como el estudio cualitativo de los objetos geométricos. No se preocupa de las medidas o de las formas rígidas; un globo desinflado y uno inflado, ya sean redondos o alargados, representan el mismo objeto topológico, lo mismo sucede en el caso de una liga estirada, una circular y una enredada.

Una interesante rama de la topología es la que se dedica a estudiar los nudos. Sí, en efecto, hemos dicho nudos y pensado en ellos precisamente como la palabra en el lenguaje llano lo indica. Los nudos, además de ser de utilidad para marinos y representar un reto para jóvenes exploradores, constituyen un concepto que ha sido abstraído por los científicos y que actualmente es objeto de investigación muy seria en matemáticas.

Tomemos un cordel y hagamos un nudo con él. Si dejamos los cabos sueltos es posible deshacer el nudo pasando estos extremos por los lugares adecuados. Sin embargo, si después de hacer el nudo fijamos los cabos a una pared o los unimos uno con otro muy probablemente ya no podamos deshacer el nudo; más generalmente, si hacemos dos nudos y unimos los extremos de cada uno probablemente tampoco sea posible modificar uno de aquéllos para hacerlo igual al otro. Son este tipo de problemas y su abstracción matemática lo que constituye la teoría de los nudos.

Matemáticamente, un *nudo* lo podemos definir como una curva (1-dimensional) situada en el espacio (3-dimensional), de manera que comienza y termina en el mismo punto. Las figuras de la lámina 1 representan varios ejemplos de nudos, el primero de los cuales está "desanudado" y se le llama *nudo trivial*. La cuestión de decidir si dos nudos son *equivalentes*, es decir, si es posible deformar uno, sin cortarlo, para convertirlo en el otro, puede precisarse matemáticamente, aunque en los casos sencillos que contiene la lámina es más o menos evidente. No procederemos a hacerlo en este ensayo y nos apegaremos a la idea intuitiva que hemos introducido. No obstante, sí vale la pena notar que la lámina 1 no presenta realmente ilustraciones de los nudos, sino lo que podríamos designar como su *proyección regular*, es decir, una imagen plana que muestra cuándo una porción del cordel pasa por "delante" y cuándo lo hace por "detrás" de otra. Es más bien con estas proyecciones, que codifican completamente el nudo, con las que trabajaremos.

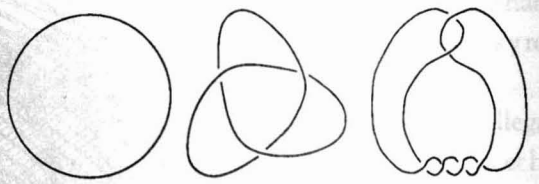


Lámina 1

Con el objeto de abordar el problema de distinguir nudos introduciremos un procedimiento al que llamaremos *juego de los colores* y es como sigue. Tómese una rueda con un número impar n de rayos distribuidos uniformemente, a cada uno de los cuales se le asigna un color (r = rojo, v = verde, a = amarillo, m = morado, z = azul), como lo ilustra la lámina 2; para el caso, $n = 5$.

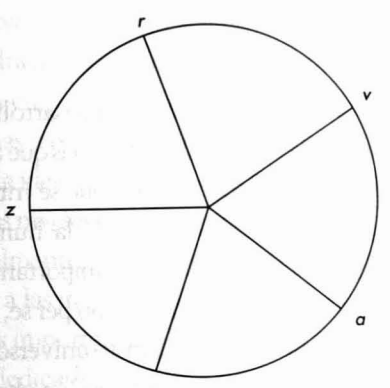


Lámina 2

Usando los n colores distintos de la rueda, iluminemos cada uno de los arcos de la proyección de un nudo siguiendo las siguientes reglas:

1. Deben usarse al menos dos colores distintos.

2. En un cruce, el color del arco que pasa por delante debe ser el que corresponde a la bisectriz (única) del ángu-

lo que forman los rayos con los colores de los arcos que inciden en el cruce y pasan por detrás.

Estas reglas las ilustra la figura de la lámina 3.

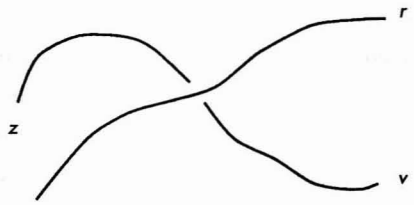


Lámina 3

Por ejemplo, el llamado *nudo de la figura ocho* o, simplemente, *nudo ocho*, K_8, que se presenta en la figura A de la lámina 4, está iluminado usando los cinco colores de la rueda de la lámina 2 de modo que cumple con las reglas del juego; sin embargo, el *nudo trébol T* de la figura B de la misma lámina no es posible iluminarlo con los cinco colores de acuerdo con las reglas del juego.

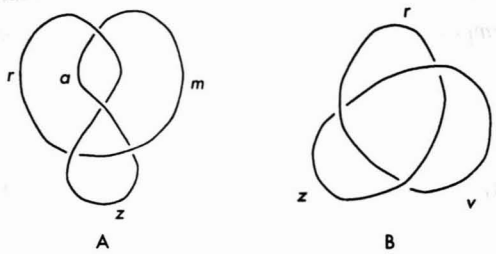


Lámina 4

Por otro lado, si en vez de utilizar una rueda de cinco colores, utilizamos una de tres, como en la figura de la lámina 5, sí es posible iluminar el trébol. Fácilmente podemos verificar, sin embargo, que no es posible iluminar el ocho con tres colores.

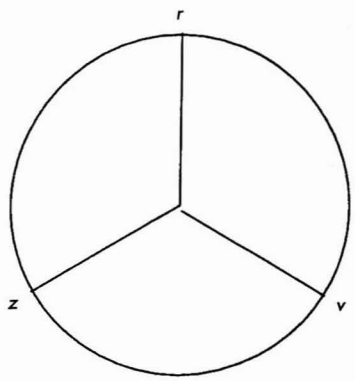


Lámina 5

Más aún, si tomamos un nudo y una de sus proyecciones regulares puede ser iluminada con *n* colores respetando las reglas del juego, entonces es fácil probar que cualquiera otra de ellas puede serlo también. El número de colores requerido para iluminar la proyección de un nudo es un *invariante* del nudo. Al mínimo de estos números *n* lo llamaremos *número cromático*. Así, el nudo ocho tiene como número cromático el 5, pero no el 3, y el trébol tiene el 3, pero no el 5. Podemos concluir que *el nudo ocho y el nudo trébol no son equivalentes*. No podemos modificar uno, sin cortarlo, para obtener el otro.

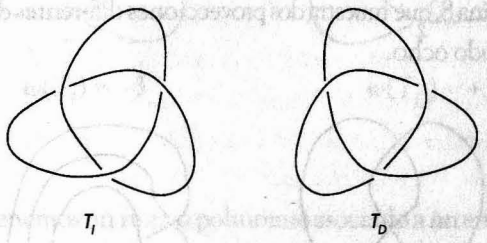


Lámina 6

Las figuras de la lámina 6 representan el nudo trébol y su imagen especular (como se ve a través de un espejo). De aquí surge la pregunta de si estos nudos son equivalentes. Tal vez la experiencia cotidiana nos permita aventurarnos a decir que no lo son, pero nuestro juego de los colores no basta para probarlo, ya que si uno de los tréboles se ilumina con tres colores, al ponerlo frente a un espejo obtenemos automáticamente una iluminación para el otro: ambos tienen número cromático igual a 3. De hecho, vale en general que *si un nudo tiene número cromático n, su imagen especular también tiene número cromático n.*

A continuación describiremos un nuevo juego para distinguir con más precisión los nudos.

3. *Nudos, enlaces y polinomios*

Podemos considerar dos o más nudos que no estén separados del todo, sino que estén enlazados, así obtenemos precisamente un *enlace*, como lo muestran las figuras de la lámina 7, donde vemos dos nudos triviales no enlazados (A), dos nudos triviales con un enlace llamado *enlace de Whitehead* (B) y dos nudos trébol doblemente enlazados (C).

El número cromático, que definimos antes, no distingue nunca a un nudo de su imagen especular. ¿Serán éstos siempre equivalentes, es decir, será todo nudo *anfiqueiral*?

Introduciremos ahora un nuevo invariante, más fino que el número cromático. Las proyecciones regulares de nu-

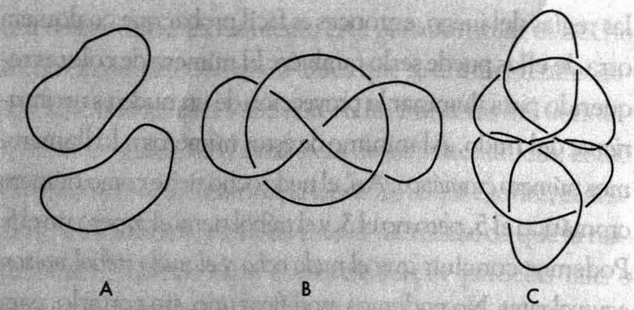


Lámina 7

dos equivalentes pueden ser muy distintas, como se ve en la lámina 8, que muestra dos proyecciones diferentes del mismo nudo ocho.

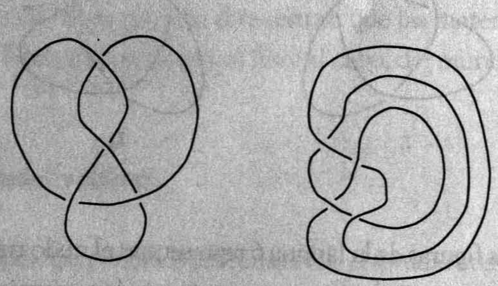


Lámina 8

Asimismo, enlaces equivalentes pueden tener proyecciones muy distintas. El matemático alemán Kurt Reidemeister probó un teorema que permite pasar de una proyección regular de un enlace a cualquier otra, a través de ciertas modificaciones conocidas como *jugadas de Reidemeister*, que se llevan a cabo como lo ilustran las figuras de la lámina 9. Mediante estas jugadas se pueden modificar porciones de nudos o enlaces mientras que las partes restantes se mantienen sin cambios (véase, por ejemplo, Burde y Zieschang). Se les conoce como jugadas de Reidemeister de tipos I, II y III.

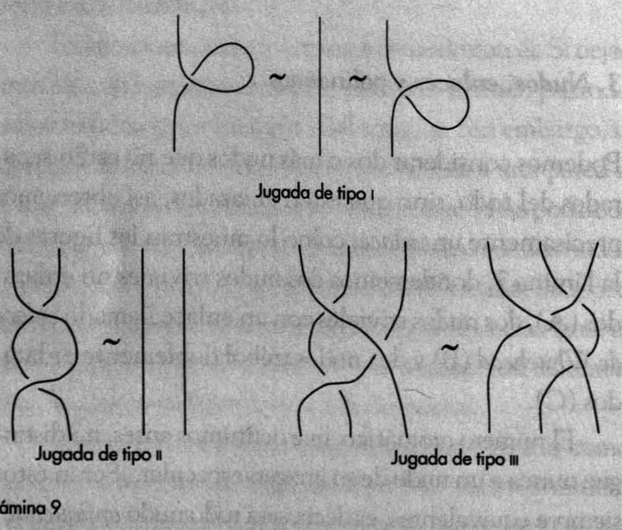


Lámina 9

El teorema de Reidemeister afirma que *dos nudos son equivalentes si y sólo si se puede pasar de alguna proyección regular de uno a alguna del otro, llevando a cabo un número finito de jugadas de tipo I, II o III (y, en caso necesario, una deformación del plano).*

Definiremos ahora el llamado *corchete de Kauffman* (véase Kauffman: 1988 y 1991), que asocia a una proyección de un nudo o enlace un polinomio en la indeterminada x, con números enteros como coeficientes y potencias positivas y negativas de la indeterminada, de acuerdo con las siguientes fórmulas de recurrencia, en las que entre corchetes escribimos sólo una porción del nudo suponiendo que el resto del nudo no se altera:

1. [⟩⟨] = x [≍] + x^{-1} [⊃⊂].

Esta regla dice que si venimos caminando por un "paso superior" podemos cambiarlo yendo a la izquierda y multiplicando el corchete del nudo o enlace más sencillo que resulta por x y yendo a la derecha y multiplicando el corchete del nudo o enlace resultante por x^{-1} y sumando ambos resultados.

Ejemplo:

[∞] = x[∞] + x^{-1} [∞]

2. [K ⊔ O] = $(-x^2-x^{-2})$ [K].

Esta regla dice que si un enlace tiene una componente que es un nudo trivial desenlazado podemos eliminarla si multiplicamos el corchete del nudo o enlace que queda por $(-x^2-x^{-2})$.

Ejemplos:

[∞] = x[O∞] + x^{-1} [∞]
= $x(-x^2-x^{-2})$[∞] + x^{-1}[∞]
= $-x^3$[∞]

y

[∞] = x[OO] + x^{-1}[∞]
= $x(-x^2-x^{-2})$ [O] + x^{-1}[O]
= $-x^3$ [O]

3. [O] = 1.

Esta regla, finalmente, dice que el corchete de la proyección del nudo trivial es el polinomio trivial 1.

Así, tenemos que

[∞] = $-x^3$[∞]
= $(-x^3)(-x^3) = x^6$

Ahora podemos terminar el cálculo del corchete de Kauffman correspondiente al nudo trébol. Faltaba por calcular

$$\begin{aligned}[\ ] &= x[\ ]+x^{-1}[\ ]\\ &= x(-x^3)+x^{-1}(x[\ ]+x^{-1}[\ ])\\ &= -x^4+1+x^{-2}(-x^2-x^{-2})\\ &= -x^4-x^{-4}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para el nudo trébol *izquierdo* tenemos que

$$\begin{aligned}[T_I] = [\ ] &= x(x^6)+x^{-1}(-x^4-x^{-4})\\ &= x^7-x^3-x^{-5}.\end{aligned}$$

Si tomamos la imagen especular de la proyección de un nudo, lo único que cambia es la orientación, por lo que cambia "derecha" por "izquierda"; así, la regla 1 implica que en el corchete de la imagen especular aparecen las potencias de x con los signos opuestos. Por lo tanto, para la proyección del nudo trébol *derecho* se tiene que

$$[T_D] = [\ ] = -x^5-x^{-3}+x^{-7}.$$

Ambas proyecciones tienen, consecuentemente, polinomios diferentes.

Es un ejercicio sencillo verificar que si se modifica la proyección de un nudo con jugadas de Reidemeister de tipos II o III su polinomio no se altera. Sin embargo, la jugada de tipo I sí lo cambia:

$$\begin{aligned}[\ ] &= -x^3[\ ],\\ [\ ] &= -x^{-3}[\ ];\end{aligned}$$

por lo que el corchete de Kauffman no es un invariante de nudos ni de enlaces. Para obtener uno que sí lo sea, se define el *torcimiento* $w(K)$ de la proyección regular de un nudo o enlace K de la siguiente forma. Désele a cada componente del enlace una orientación y cuéntense en su proyección los cruces positivos y los negativos, según las figuras de la lámina 10.

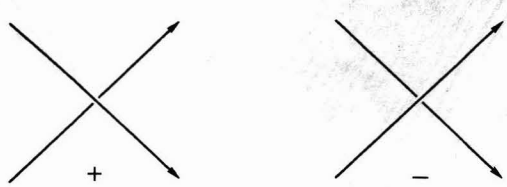
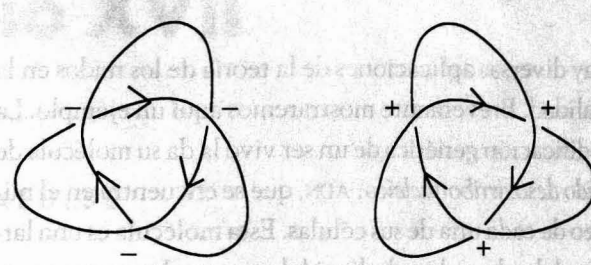


Lámina 10

Entonces $w(K)$ es el número de cruces positivos menos el número de cruces negativos. Por ejemplo, como se aprecia en las figuras de la lámina 11, el trébol izquierdo T_I tiene torcimiento –3 y el derecho T_D, +3.



$w(T_I) = -3$ $\qquad$ $w(T_D) = +3$

Lámina 11

Tenemos un nuevo polinomio asociado a un enlace K definido por

$$f_K(x) = (-x^3)^{-w(K)}\,[K].$$

Éste sí es un invariante de nudos, como es fácil verificar, ya que también es invariante bajo la jugada de Reidemeister de tipo III. En particular, tenemos

$$\begin{aligned}f_{T_I}(x) &= (-x^3)^3(x^7-x^3-x^{-5}) = -x^{16}+x^{12}+x^4,\\ f_{T_D}(x) &= (-x^3)^{-3}(-x^5-x^{-3}+x^{-7}) = x^{-4}+x^{-12}-x^{-16};\end{aligned}$$

por lo tanto, *el nudo trébol izquierdo T_I y el nudo trébol derecho T_D no son equivalentes*, es decir, el nudo trébol no es *anfiqueiral*.

Puede probarse, para un nudo K, que el polinomio $f_K(x)$ tiene siempre potencias múltiplos de 4, por lo que conviene simplificarlo, sustituyendo x por $t^{-1/4}$, para obtener el llamado *polinomio de Jones* de K, $V_K(t) = f_K(t^{-1/4})$ en potencias de la indeterminada t, (véase Jones). En particular,

$$\begin{aligned}V_{T_I}(t) &= t^{-1}+t^{-3}-t^{-4},\\ V_{T_D}(t) &= -t^4+t^3+t.\end{aligned}$$

Se puede demostrar que para el valor absoluto n del polinomio de Jones que se alcanza al tomar $t=-1$, $n=|V_K(-1)|$, se puede iluminar el nudo K con n colores como se explicó en la primera parte de este trabajo. En el caso del trébol, $|V_{T_I}(-1)| = 3 = |V_{T_D}(-1)|$. Es un buen ejercicio calcular el polinomio de Jones del nudo ocho K_8, para obtener

$$V_{K_8}(t) = t^2-t+1-t^{-1}+t^{-2},$$

y verificar que $|V_{K_8}(-1)| = 5$, que es el número cromático de K_8.

4. *Nudos y realidad*

Hay diversas aplicaciones de la teoría de los nudos en la realidad. Brevemente mostraremos aquí un ejemplo. La codificación genética de un ser vivo la da su molécula de *ácido desoxirribonucleico*, ADN, que se encuentra en el núcleo de cada una de sus células. Esta molécula es una larga y delgada cadena helicoidal que, en algunos casos, es circular, es decir, ignorando la hélice y la estructura química local, se trata de una curva cerrada simple, que está anudada. Por ejemplo, éste es el caso para la bacteria *Escherichia coli*; asimismo, una molécula de este tipo puede ser producida *in vitro* a partir de una molécula lineal. Siendo la fórmula química de esta molécula la misma, el nudo (o enlace) que ésta forma puede variar; es decir, se pueden tener distintos isómeros de la molécula, que corresponden a variedades biológicas diferentes. Hay enzimas naturales llamadas *topoisomerasas*, que actúan en forma específica en cruces de la molécula cambiando los pasos superiores por inferiores, como lo muestra la lámina 12 (a esto se le llama *recombinación en sitio específico* [véase Sumners]); es decir, cambian en forma controlada la molécula de ADN por un isómero que, como nudo, es, en general, distinto. Estas enzimas tienen distintos nombres, de acuerdo con la forma como actúan.

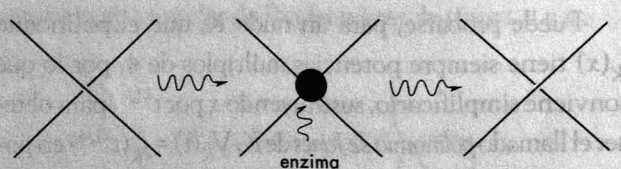
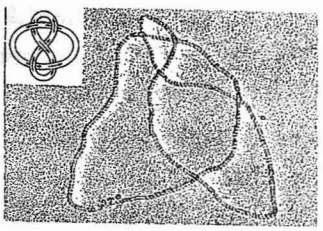


Lámina 12

No sólo ha habido aplicaciones de la teoría de nudos en el estudio de la topología del ADN y, con ello, para la predicción del tipo topológico de la molécula resultante, sino que los propios problemas que plantea la manipulación genética han impulsado la investigación en teoría de nudos para darles respuesta matemática. La lámina 13 muestra un enlace (*catenane*) producido por la enzima Tn3–resolvasa en ADN de forma I y nudos trébol izquierdo y derecho de dsADN generados por la topoisomerasa de ADN de *E. coli* que actúa en ADN de forma II. ◆



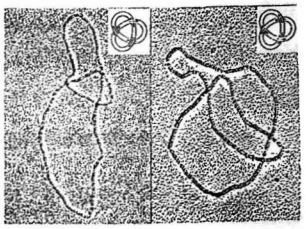


Lámina 13
Catenane producido por Tn3-resolvasa actuando en ADN de forma I

Nudos trébol izquierdo y derecho de dsADN generados por topoisomerasa de ADN de *E. coli* actuando en ADN de forma II

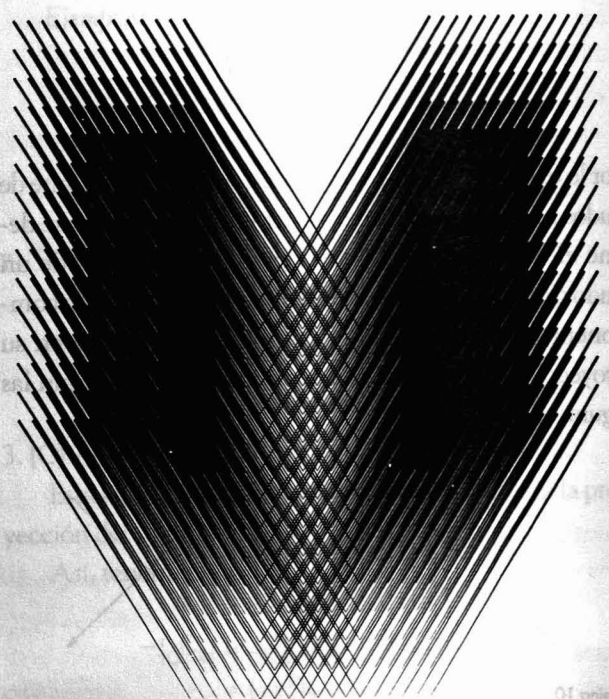
Referencias

Burde, G. y H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter (Gruyter Studies in Mathematics, 5), Berlín, 1985.

Jones, V. F. R., "A Polynominal Invariant for Links Via Von Neumann Algebras", en *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 129, 1985, pp. 103-112.

Kauffman, L. H., "New Invariants in the Theory of Knots", en *Amer. Math. Monthly*, vol. 95, núm. 3, 1988, pp. 195-242.

Kauffman, L., *Knots and Physics*, World Scientific (Series on Knots and Everything, 1), Singapur, 1991.

Sumners, De W., "Untangling DNA", en *The Mathematical Intelligencer*, vol. 12, núm. 3, 1990, pp. 71-80.

Wigner, E. P., "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", en *Communications in Pure and Applied Math.*, vol. 13, 1960, pp. 1-14.