

UNIVERSIDAD DE MÉXICO

REVISTA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO / MARZO-ABRIL 1999 NÚM. 578-579

♦ Ilustraciones
de Artís
y Felguérez



**El universo
de las matemáticas**

UNIVERSIDAD DE MÉXICO

REVISTA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Enero-Febrero 1999

Núm. 576-577

Nueva poesía mexicana

Arista, Bautista, Elvridge-Thomas,
España, González, Helguera,
Hernández de Valle Arizpe,
López, Lumbreras y Russek

Moreno Villarreal:

Frida Kahlo y la letra o

Lope Blanch: La denominación
de la lengua española

Cansino: Isaiah Berlin:
el último liberal

Ilustran: Anguía, Jaurena Juárez,
Morales, Posadas, Quintanilla,
Venegas y otros

Llame a los números 666 6936, 666 3972 y fax 666 3749
y acudiremos a tomar su suscripción *dentro* del D.F.



Coordinación de Humanidades

UNIVERSIDAD DE MÉXICO

REVISTA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Director: Alberto Dallal

Consejo editorial: Raúl Benítez Zenteno, Rubén Bonifaz Nuño, Alberto Dallal, Juliana González, Humberto Muñoz, Enriqueta Ochoa, Herminia Pasantes, Manuel Peimbert Sierra, Ricardo Pozas Horcasitas, Josefina Zoraida Vázquez

Coordinador editorial: Octavio Ortiz Gómez

Corrección: Amira Candelaria Webster

Publicidad y relaciones públicas: Rocío Fuentes Vargas

Administración: Leonora Luna Téllez

Diseño y producción editorial: Revista Universidad de México

Oficinas de la revista: Los Ángeles 1932, número 11, Colonia Olímpica, C. P. 04710, Deleg. Coyoacán, México, D. F. Apartado Postal 70288, C. P. 04510, México, D. F. Teléfonos: 606 1391, 606 6936 y Fax 666 3749. Correspondencia de Segunda Clase. Registro doc Núm. 061 1286. Características 228661 1212. Impresión: Impresora y Editora Infagon, S.A. de C.V., Eje 5 Sur B Núm. 36, Col. Paseos de Churubusco, 09030, México, D.F. Distribución: Publicaciones Sayrols, S. A. de C. V., Mier y Pesado 126, Col. del Valle, 03100, México, D. F. y revista *Universidad de México*. Precio del ejemplar: \$15.00. Suscripción por 12 números: \$150.00 (US\$90.00 en el extranjero). Ejemplar de número atrasado: \$20.00. Revista mensual. Tiraje de cuatro mil ejemplares. Esta publicación no se hace responsable por textos no solicitados. Cada autor es responsable del contenido de su propio texto. Certificado de licitud de título número 2801. Certificado de licitud de contenido número 1797. Reserva de uso exclusivo número 112-86.

Correo electrónico (E-mail): reunimex@servidor.unam.mx

Internet: <http://www.unam.mx/univmex>

MARZO-ABRIL 1999
NÚM. 578-579

Índice

	◆ 2 ◆	Presentación
ALBERTO BLANCO	◆ 3 ◆	Poesía y ciencia
J. ANDRÉS CHRISTEN	◆ 7 ◆	Probabilidad, canicas en urnas y estadística de la (bio)diversidad
JOSÉ ANTONIO DE LA PEÑA	◆ 12 ◆	La enseñanza de las matemáticas: la crisis de las reformas
CARLOS PRIETO	◆ 19 ◆	Nudos, enlaces y realidad
ELÍAS TRABULSE	◆ 25 ◆	El arte barroco y los números imaginarios en México en el siglo XVII
RAFAEL FERNÁNDEZ FLORES	◆ 27 ◆	Las matemáticas nos dan seguridad
J. RAFAEL MARTÍNEZ	◆ 30 ◆	Piero della Francesca: pintor y matemático
JAVIER BRACHO	◆ 38 ◆	Caleidoscopios y simetría
MANUEL FELGUÉREZ	◆ 45 ◆	La computadora y la creación artística
MICHAEL BAROT	◆ 53 ◆	Aquiles, la tortuga, Einstein y otras historietas
SOFÍA REDING BLASE	◆ 60 ◆	Entre lo acabado y lo siempre abierto: exactitud y analogía
MAX NEUMANN COTO	◆ 65 ◆	¿Qué forma tiene el espacio?
ADOLFO SÁNCHEZ VALENZUELA	◆ 71 ◆	La matemática es un oficio que todos podemos aprender
LAURA ORTIZ BOBADILLA	◆ 80 ◆	Las matemáticas me dan vértigo
IVÁN TRUJILLO		
ROSA MARGARITA MAUPOMÉ	◆ 83 ◆	Matemáticos de celuloide

LA EXPERIENCIA CRÍTICA

DELIA CROVI DRUETTA	◆ 88 ◆	Acerca de la industria cultural y la globalización entre México y EUA
ALBERTO DALLAL	◆ 90 ◆	Picnic: autobiografía fabulada
MIGUEL BAUTISTA	◆ 92 ◆	Lo lúdico y sus motivaciones en la obra de René Avilés Fabila
	◆ 93 ◆	Colaboradores

Presentación



El final del siglo XX posee amplios mecanismos de divulgación de las verdades que los pensadores, científicos, artistas, dirigentes e intelectuales descubren o elaboran en la realidad individual y social. Sin embargo, paradójica o curiosamente, estas verdades se entremezclan con las múltiples y proliferadas, repetitivas y sospechosas "verdades a medias", simulaciones, superficiales apariencias y hasta mentiras que la publicidad y la propaganda (éstas sí profesionales, organizadas y duchas en sistemas de divulgación) tienen siempre a la mano para llenar de sombras y aparentes destellos la mentalidad colectiva y las estructuras culturales. La investigación seria, específica y especializada no ha desarrollado con el mismo ritmo y eficiencia sus sistemas de divulgación y, no obstante que las grandes o profundas soluciones provienen de las propuestas que hacen investigadores especializados, los conductos de la verdad científica se ven obstruidos, obstaculizados y hasta distorsionados por los excesos de la propaganda, la publicidad y cierto periodismo que no conlleva como objetivo fundamental el hacer a sus usuarios entrar en conocimiento de los fenómenos que acaecen en la realidad. La revista Universidad de México, interesada en dar a conocer los productos del saber especializado, así como las obras y ejercicios que la poesía y las artes tienen para entregar a los públicos más amplios posibles, se da a la tarea de hacer llegar materiales que ponen en contacto, a cierto lector avezado, con las matemáticas, esa disciplina básica para la comprensión objetiva del universo pero a la vez un mundo de pensamientos que llevan de la mano a la abstracción, a la imaginación productiva y a la sensibilización de los procesos mentales. En un proyecto directamente establecido con el doctor José Antonio de la Peña, director del Instituto de Matemáticas de nuestra Casa de Estudios, ofrecemos este número singular, interesante y efectivo en el que la revista se convierte en instrumento o vehículo de acceso a temas, procedimientos y prácticas mucho más cercanos de lo que, los no especialistas y los especialistas de otras disciplinas y ámbitos de trabajo, se imaginan. ♦

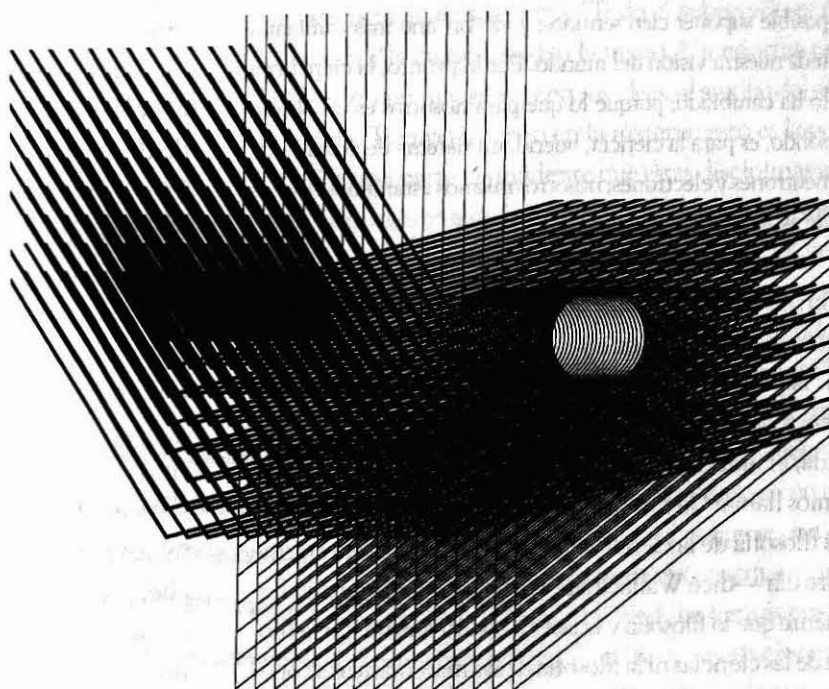
Poesía y ciencia

♦
ALBERTO BLANCO

Aunque es costumbre en nuestro tiempo considerar a la ciencia y la poesía como dos polos opuestos, antitéticos e irreconciliables, no podemos ni debemos pasar por alto el hecho de que muchos de los más grandes poetas del siglo XX, así como muchos de los científicos más importantes de nuestro tiempo no sólo se han sentido atraídos por la práctica de sus "antípodas", sino que han dedicado buena parte de su tiempo y muy serios esfuerzos a tratar de llegar a comprender la naturaleza de estas dos actividades humanas, así como a trazar paralelismos, contrastes y posibles relaciones entre ellas.

Habría que decir, por principio de cuentas, que tanto la ciencia —esa necesidad humana de entender el mundo real tal cual es— como la poesía —esa necesidad humana y más que humana de comprender y de expresar el mundo real y más que real no sólo como es, sino como podría ser— son dos actividades que nos han acompañado a lo largo de mucho tiempo. Ninguna de estas dos empresas es, en el marco de la evolución humana, reciente.

Habría que decir, en un segundo término, que tanto la poesía como la ciencia comparten un mismo anhelo: penetrar en la realidad sin conformarse con lo que nos dicen las apariencias inmediatas para tratar de entenderla mejor, de comprenderla. Porque, como afirmó la poeta May Swenson: "ciencia y poesía son semejantes o aliadas, me parece, en su fin principal y más vasto: investigar todos y cada



uno de los fenómenos de la existencia más allá de la plana superficie de las apariencias".

Que esta "plana superficie de las apariencias" no ha sido tal para los poetas, es cuestión que no necesita demostración: la poesía, después de todo, no es sino la expresión de ese anhelo humano de ir más allá de lo conocido, de rasgar lo que los indios llaman "el velo de Maya" de la realidad sensible para penetrar hasta el "corazón de las tinieblas"; para escuchar "el son del corazón"; para vivir "el corazón del instante" en toda su plenitud.

Y es que, por más que las ciencias, los descubrimientos, las investigaciones y los viajes hayan ido develando paulatinamente un misterio tras otro, siempre quedará un sinnúmero de capas de la gran cebolla universal aguardando a que asome nuestra curiosidad. Incluso la misma ciencia que ha efectuado el trabajo de evaporar una serie de enigmas se ha encargado también de aportarnos nuevos y to-

avía más fascinantes misterios que sustituyen, muchas veces con creces, a las viejas perplejidades. De una manera o de otra la presencia de lo desconocido no sólo nos seguirá siendo necesaria, sino que resulta para nosotros inevitable. Así lo reconoció el viejo Borges en sus conversaciones con Osvaldo Ferrari en 1985:

Y, yo creo que la presencia de lo desconocido es muy necesaria, pero nunca nos faltará, ya que, suponiendo que exista el mundo externo, y yo creo que sí, ¿qué podemos conocer de él a través de las intuiciones que tenemos y de cinco sentidos corporales? Voltaire imaginó que no era imposible suponer cien sentidos; y ya con uno más cambiaría toda nuestra visión del mundo. Por lo pronto, la ciencia ya lo ha cambiado; porque lo que para nosotros es un objeto sólido, es para la ciencia, bueno, un sistema de átomos, de neutrones y electrones; nosotros mismos estaríamos hechos de esos sistemas atómicos y nucleares.

En tercer término, hay que reconocer que tanto la poesía como la ciencia aspiran a un resultado semejante: reducir la pluralidad multiforme de la realidad a la unidad sintética de una ley o de un poema para tratar de integrar la vida, el mundo, el universo. En este sentido lo que podríamos llamar "la filosofía de la poesía" no difiere mucho de la filosofía de la ciencia. "Me agradó mucho enterarme el otro día —dice Wallace Stevens— que Carnap dijo llanamente que la filosofía y la poesía son lo mismo. Ni la filosofía de las ciencias ni la filosofía de las matemáticas se oponen a la poesía."

Así, un filósofo de la estatura de Mircea Eliade al reflexionar en sus *Diarios* acerca de las partículas de altas velocidades, hacía en 1961 una serie de consideraciones que tienen, entre otros, el mérito de reunir en un solo párrafo los más recientes descubrimientos de la física nuclear, el ojo especulativo de la filosofía y la gran velocidad de observación y la capacidad de dar forma de la poesía. Éste es el rico y sugerente panorama que nos plantea Eliade:

Leo en un diario vespertino una reseña de la Conferencia Internacional sobre "partículas de alta energía" en Aix-en-Provence. Estoy verdaderamente fascinado con esta nueva categoría de partículas nucleares o, como dice el escritor, "seres físicos cuyas vidas duran sólo una diezmilésima de una mil millonésima de otra mil millonésima parte de un segundo... ¡Con qué interés leería un pensador de la India estas líneas! Se trata aquí de la descripción más fecunda posible del

carácter transitorio del cosmos ...: el arquetipo ejemplar de la existencia en el tiempo.

Sin embargo, y a pesar de la proximidad de sus fines últimos, no cabe duda de que la poesía y la ciencia conforman una extraña pareja. Por un lado, los poetas se valen de las imágenes y de las metáforas para decir aquello que intentan decir, mientras que, por el otro, los científicos hacen uso de los números y de las ecuaciones para decir lo que tienen que decir. No es lo mismo. Porque debemos reconocer que, así como ambos oficios comparten metas finales, difieren radicalmente en sus medios de expresión y en sus lenguajes.

Cabe preguntarnos si cuando hablamos de que la ciencia y la poesía "comparten metas finales" estamos hablando de una misma cosa: exactamente de las mismas metas. En otras palabras: ¿es el conocimiento que ofrece la ciencia el mismo que el que nos brindan las artes, en particular la poesía? Si no es así, ¿en qué difieren? Así intentaba responder a esta pregunta crucial el poeta Juan L. Ortiz en una conversación de principios de los años sesentas: "Es preciso no enfrentar el arte y la ciencia, pero también es innegable que son dos vías. El artista tiende a la sensibilidad y el científico obra por concepto, por abstracción."

Sensibilidad y abstracción, he aquí planteada la dicotomía; o razón y sentimiento, la pareja de siempre. Por todo ello, y sin caer de lleno en el lugar común sancionado por el menos común de los sentidos —el artista es sensible y "cálido", puesto que siempre obra conforme a los dictados de su intuición, mientras que el científico es "frío" y exacto, pues sigue siempre los dictados del método y el rigor de los números— cabe continuar con el desconocido pensamiento del poeta argentino y citarlo en extenso:

Pero las matemáticas y la química, y aun la filosofía, están determinadas, en lo profundo, por la intuición que, tal como señalara Einstein, es de tipo poético. Quiere decir entonces que el científico y el artista en ese aspecto de la intuición se juntan. Hay una sensación de cierta cosa que trasciende, de cierta realidad profunda, por un momento de casi iluminación. Por lo demás, no creo que ese conocimiento esté solamente en el científico o en el artista; hay un tipo de conocimiento casi universal, que es extensivo a toda criatura viviente, incluyendo a los animales.

Es bien sabido que ese momento de "casi iluminación" del que han sido objeto tantos científicos, y que ha dado pie

a tantas y tan sabrosas anécdotas con respecto a sus más grandes descubrimientos —desde los inocentes juegos de Einstein en sus baños de burbujas en la tina de su casa, de donde habría de surgir finalmente la teoría de la relatividad, hasta el célebre sueño del Ouroboros (la serpiente que se muerde la cola) de Kekulé, y que le dio la pauta para llevar a cabo el “descubrimiento” de la estructura cíclica del benceno—, se halla muy sospechosamente cerca del rapto producido por la visita de la Musa al poeta. Es justamente lo que llamamos “imaginación”.

Y es que, como decía Einstein, a final de cuentas, tanto para la ciencia como para la poesía: “la imaginación es más importante que el conocimiento”. Después de todo, ¿qué, si no la imaginación, es lo que ha permitido a los científicos sospechar primero, y comprobar después, que la sólida realidad que nos rodea no es sino una ilusión, un inmenso espacio “vacío” donde giran a velocidades inconcebibles unas cuantas partículas sólidas de materia? En otro sentido, ¿qué, si no la imaginación, es lo que nos ha permitido visualizar el tiempo, darle forma al tiempo?

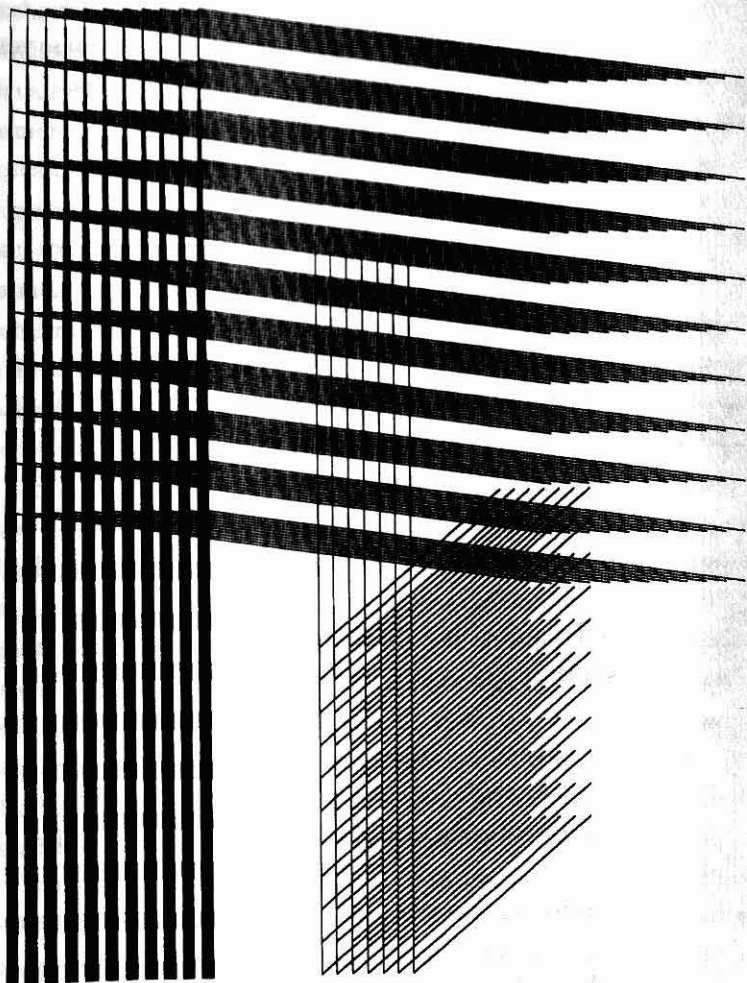
El gran director de cine ruso Andrei Tarkovski concebía su arte precisamente como una escultura del tiempo. Quede claro: Tarkovski no concebía el cine (en todo caso su cine) como una escultura, una imagen tridimensional en el tiempo, sino como tiempo esculpido. Y aquí volvemos al viejo —y tal vez al único— tema, y problema, de la poesía y del arte: el tiempo. El tiempo sucesivo y su “congelación” en la obra y el instante de la creación. “¿Cómo se imprime el tiempo en la materia?” —se pregunta el premio Nobel de química Ilya Prigogine en *El nacimiento del tiempo*—. “En definitiva —se responde— esto es la vida es el tiempo que se inscribe en la materia, y esto vale no sólo para la vida, sino también para la obra de arte.” (Todo el subrayado es mío.) La poesía y la ciencia se dan la mano. Un enorme científico viene, con su visión y con sus ideas, al auxilio del arte de la poesía. Tiempo inscrito en la materia: esto es la poesía.

Por otra parte, es evidente que estas disciplinas atienden a dos dominios de la realidad radicalmente distintos: la ciencia se dedica única y exclusivamente a lo que se puede medir mientras que el arte en general —y la poesía en

particular— se dedican más bien a sondear lo inconmensurable. Como dice Leonard Shlain en su indispensable *Art & Physics*: “El arte engloba un reino imaginativo de cualidades estéticas; la física, por su parte, existe en un mundo de relaciones matemáticas que se dan entre propiedades rígidamente circunscritas y cuantificables.” El arte, a través de las formas, busca eso que hoy en día, y a falta de una mejor expresión, llamamos *emoción estética*, o lo que los antiguos llamaban *entusiasmo*; la ciencia busca por sus propios medios la *exactitud*. En pocas palabras: el arte se ocupa de la calidad y la ciencia de la cantidad.

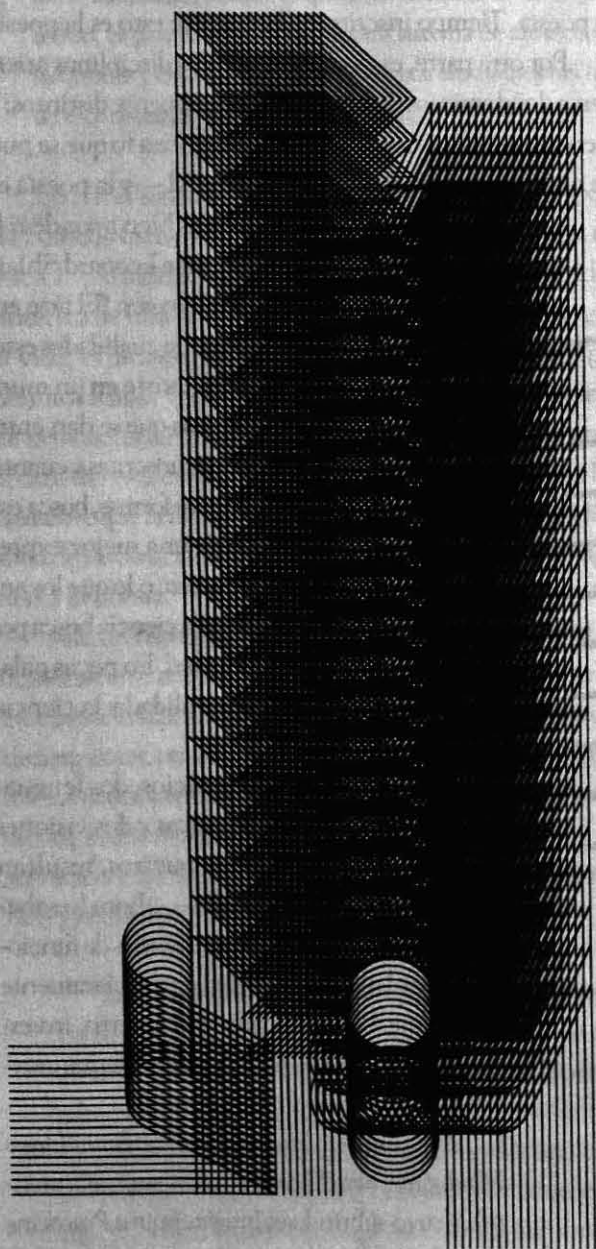
Se trata, pues, de dos oficios, dos lenguajes, dos tradiciones, dos lógicas y dos visiones del mundo que, más que opuestos, resultan ser complementarios, y que —ahora lo sabemos— corresponden a los dos modos de funcionar, interdependientes a la vez que claramente diferenciados, que se han descubierto, investigado y asignado a nuestros hemisferios cerebrales: el derecho y el izquierdo.

En su extraordinario libro *The Brain Has a Mind of Its Own* (El cerebro tiene su propia mente), y cuyo subtítulo es *Insights from a Practicing Neurologist* (Reflexiones de un neurólogo en



la práctica), el doctor Richard Restak, al tratar el apasionante y peliagudo tema de la creatividad, particularmente en lo que toca a su relación con los dos hemisferios cerebrales, dice:

Es muy útil pensar que la creatividad toma más del hemisferio cerebral izquierdo que del derecho, pero semejante esquema no es más que metafórico. Es el *cerebro entero* el que se halla involucrado en la creatividad, con ambos hemisferios comunicándose entre sí mediante más de ochocientos millones de neurofibras. La vasta red del cerebro humano contiene unos doscientos billones (200 000 000 000) de neuronas, y cada una de ellas está conectada con un gran número (cualquier cantidad entre 1 000 y 10 000) de otras neuronas...



De esta complejísima red surge, tanto en la vigilia como en el sueño, tanto en los estados de conciencia, de meditación y de alerta extrema, como en los de somnolencia, en sueño y sueño profundo, esa llamada a ver, a relacionar, a construir y a dar forma, que igual se manifiesta con belleza y exactitud en todas las obras maestras de las distintas artes que en los grandes descubrimientos científicos; lo mismo en una ecuación que en un poema.

A manera de resumen, termino este ensayo transcribiendo el poema inaugural de mi libro de "poemas científicos" (si el lector quiere puede quitar las comillas) titulado *La raíz cuadrada del cielo*. Se trata de una verdadera *declaración de principios* que, expresando muy bien —creo— mi doble condición de poeta y de científico, me fue concedido, paradójica y significativamente, durante el sueño:

Declaración de principios

Señoras, señores:

antes de comenzar esta lectura
quiero confesar aquí —del modo más natural—
un par de cosas de mucha o poca monta (según se vea),
y, muy probablemente, sin importancia alguna.

La primera de ellas es que yo soy un químico.
No quiero decir con esto que es todo lo que soy,
pero sí que mi formación es de científico
y que —por lo tanto— entre nosotros
no será difícil estar de acuerdo en que $1+1=2$.

Claro está que si alguno de ustedes
piensa que $1+1=3$, yo estoy de acuerdo.

O si alguno de ustedes va más lejos
y piensa que $1+1=3.1416...$ también.

Todavía más: si alguno muy osado
piensa que $1+1=0$, también lo suscribo.

Aunque debo confesar
—y ésta es la segunda cosa que yo quería confesar—
que siento una fuerte inclinación a creer que $1+1=1$.

Pero cada científico tiene las ecuaciones que se merece
(o las ecuaciones que se le parecen) y no pienso
hacer de esta fórmula una proposición universal. ♦

Probabilidad, canicas en urnas y estadística de la (bio)diversidad

J. ANDRÉS CHRISTEN

Si alguna vez hemos tomado un curso de probabilidad o, en general, de matemáticas, gran parte de dicho curso, si no es que todo, nos la pasamos diciendo: "y todo esto, ¿para qué?" Lo que recordamos de algún curso de probabilidad son planteamientos como: "Si las placas de los coches se identifican con tres letras y tres números, ¿cuál es el número total de las placas posibles si ninguna letra puede usarse más de una ocasión en la misma placa?, ¿cuál es el número total sin esta restricción?" También se presentan los casos clásicos de barajas: "¿Cuántas personas deben escoger una carta, cada una de diferente baraja, para tener una probabilidad mínima de 0.9 de que por lo menos se escoja un as?"; o los tradicionales de canicas: "Se tiene una urna con canicas rojas, verdes y azules. Se sacan tres canicas, una a la vez, regresando cada una a la bolsa: ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea verde, la segunda azul y la tercera roja?"

Sí, ciertamente estos problemas parecen no tener sentido. Y más nos lo parecen cuando abundamos en el estudio de la probabilidad o la estadística y nos damos cuenta de que el resto del curso no tiene nada que ver (aparentemente) con barajas y canicas en urnas. Sin embargo, aun cuando artificiales, estos ejercicios constituyen las bases para resolver problemas más complejos, de los que llamamos "de a de veras". Un caso importante es el siguiente: "Se tienen canicas de varios colores en una urna y se puede sacar una canica a la vez regresando ésta a la urna: ¿Cuántos diferentes colores de canicas hay en la urna?"

En apariencia es un problema tonto. Podríamos simplemente sacar canicas hasta que hayan salido todos los colores. Pero, claro, el meollo del asunto es que no sabemos

cuántos colores hay. La pregunta entonces es: ¿cuándo dejamos de sacar canicas?

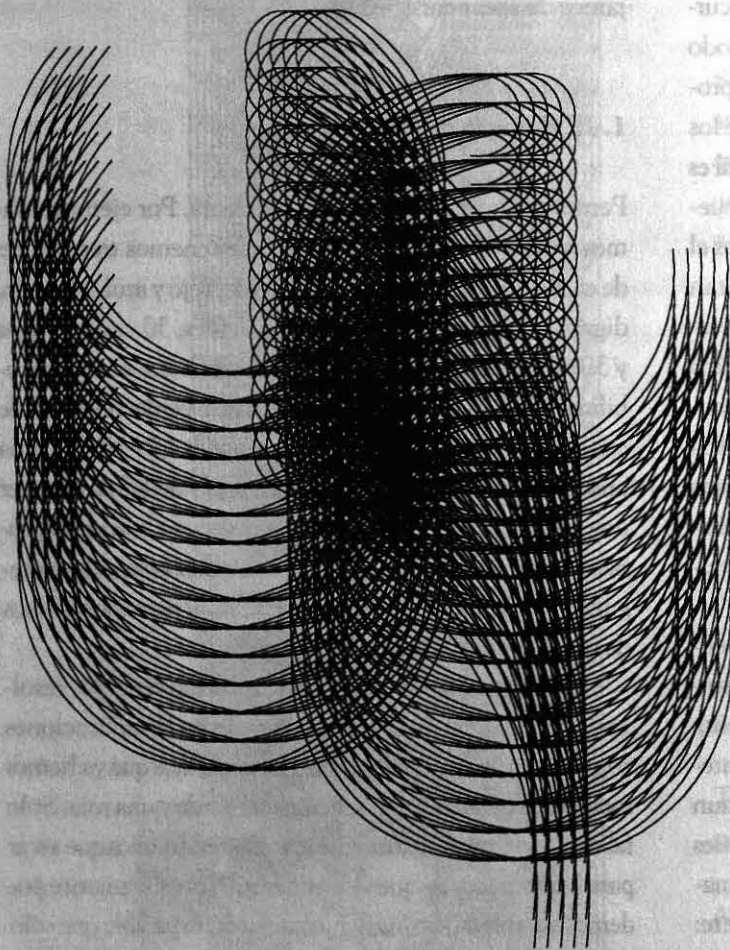
1. El ejercicio de clase

Pensemos un poco más en el problema. Por ejemplo, vamos a suponer por el momento que tenemos tres colores de canicas en la urna, digamos, verde, rojo y azul. Más aún, digamos que tenemos 30 canicas verdes, 30 canicas rojas y 30 azules. Entonces, es claro que tendremos una probabilidad de $1/3$ de obtener una canica verde (el total de canicas es 90, y hay 30 verdes, entonces $1/3 = 30/90$), una probabilidad de $1/3$ de obtener una roja y de $1/3$ de obtener una azul. Sacamos canicas y las regresamos a la urna; el problema entonces lo podríamos resumir con la siguiente pregunta: ¿cuántas canicas debemos de sacar para asegurarnos de que hayan salido los tres colores?

Aun cuando éste parece un problema sencillo, resolverlo no es nada trivial. Para evitar caer en complicaciones técnicas y para agilizar la discusión, pensemos que ya hemos sacado dos canicas y que salieron una verde y una roja. Sólo faltaría una azul. ¿Cuántas canicas más tendríamos que sacar para asegurarnos de que salga una azul? Intuitivamente podemos ver que, si sacamos dos o tres más, es posible que sólo salgan canicas verdes o rojas. La probabilidad de que salga azul es $1/3$, entonces la probabilidad de no sacar una canica azul es $1 - (1/3) = 2/3$. La probabilidad de no sacar una canica azul en dos intentos es $(2/3) \times (2/3)$ (la multiplicación, por ser eventos independientes), etcétera. Entonces, pensando en general, la probabilidad de no sacar ninguna canica azul

en n intentos seguidos es $(2/3)^n$. Esta probabilidad es aproximadamente 0.66, 0.44, 0.29, 0.19, 0.13, para $n=1, 2, 3, 4, 5$ intentos respectivamente. Nótese que dicha probabilidad se va haciendo pequeña, lo cual coincide con la idea intuitiva de que mientras más canicas saquemos, más probable es que terminemos por sacar una canica azul. Sin embargo, y esto es lo importante, $(2/3)^n$ es siempre un número mayor que cero. Es decir, por más canicas que saquemos (por más grande que sea n), siempre existe la posibilidad de que no salga una azul. Imaginemos por un momento que no sabemos que hay tres colores y que sacamos 10 canicas, y todas salen verdes y rojas (¡esto es posible para nuestra urna!) ¿Nos detendríamos ahí y diríamos que sólo hay canicas verdes y rojas?

El caso de nuestra urna es el caso simple, en el que hay igual número de canicas para cada color, el caso homogé-



neo. Podría ser mucho más complejo si a nuestra urna le agregáramos, por ejemplo, una sola canica blanca (el caso no-homogéneo); sería muy difícil sacar dicha canica y fácilmente pensaríamos que sólo había tres colores. Por difi-

cultades técnicas que están más allá de los alcances de este artículo, no vamos a explicar con mayor detalle la solución de este problema. En los párrafos anteriores sólo quisimos dar una descripción somera de los elementos implícitos en dicha solución. En las siguientes secciones presentaremos el problema real y cómo se aborda, explicando brevemente cuál es una solución del mismo.

2. El problema real

Hasta ahora parece ser que estamos en un curso tradicional de probabilidad y estadística, hablando de canicas en urnas y esas cosas. Pero, ¿qué tal si hablamos de vampiros en la selva de Chiapas? ¿Cuántas diferentes especies de vampiros hay? Este tipo de preguntas es común en estudios de biodiversidad, donde se requiere, por ejemplo, saber sobre la ecología y el número y tipos de especies que habitan en una cierta región. Esto es muy importante hoy en día para el manejo y conservación de reservas naturales y para estudios de impacto ambiental, entre otras muchas cosas. Bueno, para saber cuántas diferentes especies de vampiros habitan cierta región, lo que se nos ocurre en primera instancia es poner redes de captura y clasificar a los vampiros por especie. Cada vez que aparece una especie nueva la anotamos y regresamos los ejemplares a su medio (no es necesario matarlos). ¿Nos suena esto familiar?

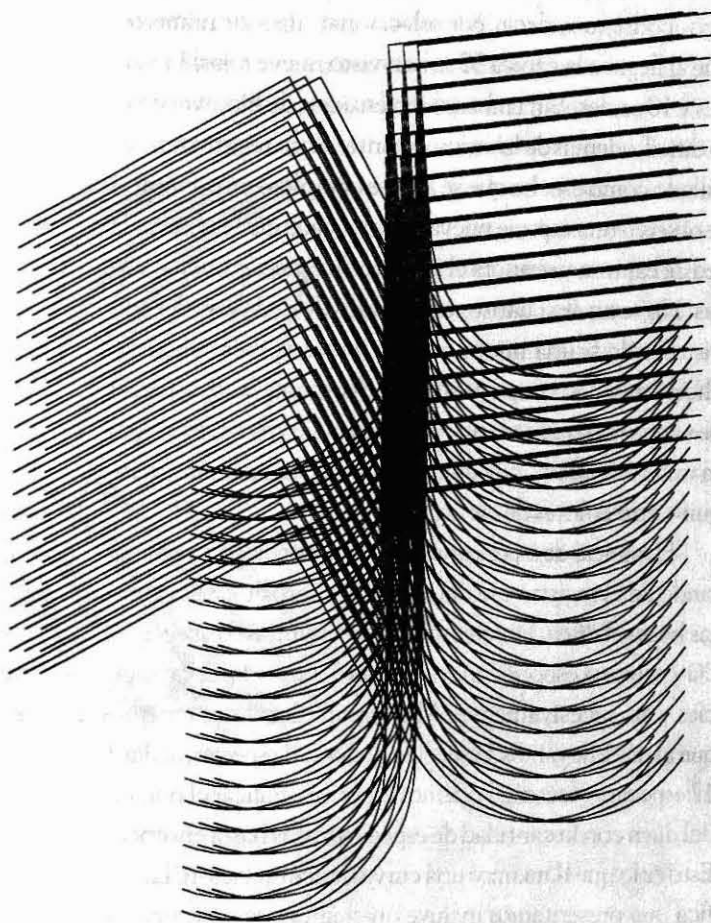
¿Qué tal si pensamos en la región de estudio como si fuera una urna y en cada vampiro como una canica? Cada color para las canicas será entonces una especie diferente, y sacar una canica será capturar un vampiro. En pocas palabras, nuestro problema de clase relativo a las canicas en urnas se ha vuelto un problema con una aplicación en la realidad. Lo que es más, hemos tomado como ejemplo un problema de biodiversidad, pero hay muchos otros ámbitos donde aparecen problemas de diversidad. Por ejemplo, tenemos un programa de computadora (un *software*) y queremos saber cuántos errores tiene. Lo *corremos* y vamos encontrando errores: ¿cuándo sabemos que ya no hay más errores? ¿Cuándo está listo para entregárselo a nuestro cliente? En este caso, los errores son los colores de las canicas y sacar una canica es toparse con un error. Otra aplicación tiene lugar en el campo de la lingüística, cuando se requiere

conocer el número total de palabras usadas por un autor. Hay además otras muchas aplicaciones en actividades tan diversas como la numismática, la astronomía, la sociología, etcétera.

Notamos que fue "fácil" traducir el problema de urnas y canicas a nuestro problema real de (bio)diversidad. Sin embargo, el lector podrá notar que se presenta una serie de simplificaciones al llevarse a cabo dicha traducción. Por ejemplo, podemos capturar muchos vampiros al mismo tiempo, mientras que no es permitido sacar muchas canicas simultáneamente. Puede ser el caso, también, que algunas especies se escondan en días de lluvia, supongamos, y otras no. Esto es como si de repente algunas canicas se escondieran entre las otras dentro de la urna y nuestra mano sólo pudiera sacar canicas de ciertos colores. Sin embargo, el problema de las canicas es lo que es: un modelo, relativamente sencillo, para un problema real, mucho más complejo.

Si pensamos en un modelo a escala de una casa (una maqueta), éste será muy diferente de la casa real. En lugar de paredes de ladrillos y cemento se usarán paredes de cartón, en lugar de ventanas con vidrios tendremos cuadritos con celofán, no será del tamaño real, etcétera. Pero, precisamente, lo que no queremos es la casa en sí, sino un modelo de ella. El modelo es mucho más fácil y rápido de hacer, lo podemos ver con facilidad desde cualquier ángulo y podemos modificarlo a nuestro antojo. No es la casa real, pero se le parece lo suficiente como para que podamos darnos cuenta de cómo será cuando esté terminada. Y si no nos gusta la maqueta, pues cambiamos el diseño de la casa modificando los errores del diseño original. Un modelo matemático es parecido a una maqueta. No es el problema real, sino una gran simplificación de éste.

Así pues, a nuestro problema de (bio)diversidad le hemos hecho una "maqueta". Nos imaginamos que capturar especies es como sacar una canica e identificar su color. Así se simplifican muchas cosas, pero, a la vez, tenemos la posibilidad de avanzar, de utilizar la información disponible de manera coherente y hasta de predecir cosas. Éste es un proceso común en la ciencia, donde utilizamos modelos matemáticos para abordar los problemas en estudio. Nótese, sin embargo, que el problema del cual estamos hablando tiene una naturaleza eminentemente aleatoria. Nunca sabremos con exactitud de qué color será la siguiente canica



que saquemos de la urna. Aun así es posible hacer modelos matemáticos que incluyan esa aleatoriedad. Éste es el ámbito de los modelos probabilísticos.

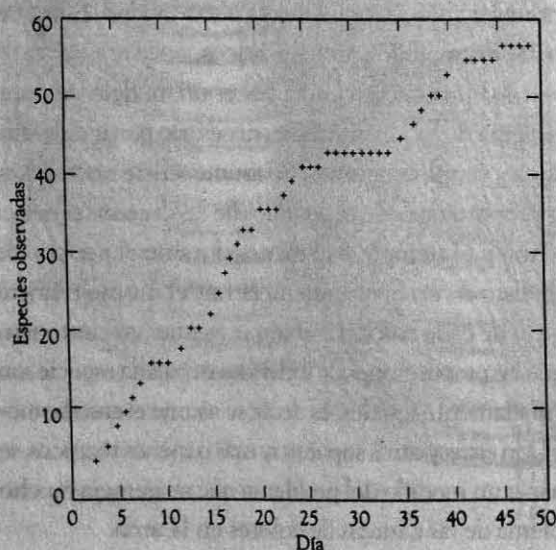
Como dijimos, para poder hacer un modelo de nuestro problema de biodiversidad es necesario partir de varios supuestos y simplificaciones. Se asume, entre otras cosas, que las proporciones de individuos de las diversas especies no varían en el tiempo, o al menos durante el periodo de estudio. Esto es, en la urna siempre hay el mismo número de canicas de cada color. También se asume (en cierto sentido) que las proporciones de individuos de cada especie son aproximadamente iguales; es decir, se asume el caso homogéneo. Con estos y otros supuestos, más o menos técnicos, se logra hacer un modelo del problema que se asemeja mucho al problema de las canicas de colores en la urna.

3. Curvas de acumulación

Hay algunos casos en estudios de (bio)diversidad en que se mantiene un registro del número de individuos vistos

de cada especie. A título de ejemplo de un registro de este tipo, podríamos decir, por seleccionar algunos números, que al llegar a la canica 30 se han visto nueve rojas, 11 verdes y 10 azules. Sin embargo, en estudios de biodiversidad es difícil, además de laborioso, mantener un registro tan detallado como éste. Lo que se hace es simplemente anotar si se observó una especie nueva. Esto es, cada día se observa la red de captura y se anota el número de especies nuevas vistas. No se anota cuántos individuos de cada especie son vistos, sólo si una nueva especie ha sido observada. Esto ahorra mucho tiempo y esfuerzo: distinguir entre especies de vampiros (o de otro tipo de seres) no es trivial, representa una gran labor, muy diferente de la que entraña distinguir entre colores de canicas.

El número de especies nuevas, vistas por día, se va acumulando en el registro y se obtiene el número de especies vistas hasta el día n . Por ejemplo, el día 1 vimos 5 especies, el día 2 vimos 3 especies nuevas, el día 3 vimos 4 nuevas especies y así sucesivamente. Al acumular los datos tenemos que al día 1 llevamos 5 especies, al día 2, 8 especies, al día 3, 12 especies, etcétera. Podemos entonces graficar el número del día n con la cantidad de especies vistas hasta entonces. Esto es lo que llamamos una curva de acumulación. La gráfica que presentamos incluye un ejemplo de una curva de acumulación (los datos no son reales; se ofrecen únicamente para ilustrar el problema).



Tenemos entonces que toda la información disponible para estimar el número total de especies está contenida en la curva de acumulación. De la gráfica se desprende que para el día 45 o 50 ya casi no encontramos especies nue-

vas. La curva se está "aplanando". Por otro lado, vemos que la curva creció mucho, casi a un ritmo constante, del día 1 al día 15 o 20. Entonces pensamos lo siguiente: si la curva está creciendo, aún faltarán especies por ver. Si la curva ya se estabilizó, ya no habrá muchas más especies por ver. Por lo tanto, importa no sólo el total de especies vistas, o sea, hasta dónde llegó la curva, sino la forma de ésta y la manera en que creció.

Nosotros (el autor y sus colegas) hemos abordado este problema de la manera siguiente: se plantea un modelo probabilístico que describe los saltos en la curva de acumulación, esto es, el número de especies nuevas vistas cada día. Tomando varios supuestos, se llega a un modelo, no muy complejo,¹ que describe dichos saltos. Uno de los parámetros del modelo es el total de especies. Dicho parámetro es estimado a través de métodos estadísticos, con lo que obtendremos una estimación del número total de especies, esto es, las especies vistas más una estimación de las que faltan por ver. La estimación toma en cuenta la manera en que evolucionó la curva de acumulación, lo cual coincide perfectamente con lo expuesto anteriormente, sin embargo, dados los alcances de este artículo, no abundaremos más en los detalles técnicos de esta estimación.

La estimación del número total de especies (por el tipo de estadística usada) es una probabilidad para cada número posible del total, a partir del número de especies vistas. Esto es, en el caso de la curva de acumulación presentada en la gráfica, se observaron 57 especies distintas. La probabilidad de tener un número total de especies menor que 57 es 0 (obviamente). La estimación de la probabilidad de tener un número de especies de 57 a 63, resulta ser (redondeando) de 0.02, 0.05, 0.07, 0.09, 0.1, 0.09 y 0.08. Esta probabilidad sube y luego baja, situándose el máximo en 61 especies (esto es, 0.1). Después de 80 especies resulta que la probabilidad es menor que 0.004. Si sumamos las probabilidades de tener desde 57 hasta 72 especies, acumulamos más de 0.9. Lo anterior significa que con una probabilidad de más de 0.9 (90%) esperamos que existan entre 57 y 72 especies en nuestra región (15 especies más de las observadas hasta ahora).²

Por lo explicado antes en relación con el problema de las canicas en la urna, siempre cabe la posibilidad de que no

¹ Es decir, "no muy complejo" en relación con los modelos probabilísticos en general; desde luego que dicho modelo es demasiado técnico para ser explicado aquí.

² Los cálculos pertinentes para las estimaciones fueron llevados a cabo en una computadora personal usando el lenguaje LISP.

hayamos visto algún color de canica, esto es, alguna especie (o varias). Esto se refleja en nuestros resultados, pues siempre hay una probabilidad positiva para cualquier total de especies, por grande que éste sea. De hecho, es necesario que

las probabilidades obtenidas para el número de especies nuevas por ver, ¿qué tan costeable es que sigamos muestreando o no? La pregunta ¿cuándo parar?, no se puede contestar en abstracto, tendrá que formularse en térmi-

nos de lo que representa observar nuevas especies, esto es, el costo de hacerlo. En el caso de la urna, cuesta muy poco sacar una canica, anotar su color y regresarla a la urna. Dará casi lo mismo sacar cinco que 10 más. Sin embargo, en estudios de (bio)diversidad muestrear puede ser muy costoso. Entonces, puede y debe hacerse un análisis de costo-beneficio para tener un punto óptimo para detenerse en la búsqueda de nuevas es-

establezcamos un máximo para el total de especies (cosa que es posible en estudios de biodiversidad, porque el número de especies de cualquier índole es siempre finito).

4. ¿Cuándo parar?

Aún queda por plantear la pregunta fundamental: ¿cuándo parar? Usando nuestro modelo, y diversas técnicas estadísticas, que no explicaremos en detalle, hemos podido hacer una estimación del número de especies nuevas por ver en futuros días. Por ejemplo, refiriéndonos a la curva de acumulación presentada en la gráfica podemos preguntarnos qué pasaría si nos quedamos cinco días más buscando especies nuevas. Resulta entonces que la probabilidad de observar cero especies nuevas es (redondeando) de 0.3. Para 1, 2, 3, 4 y 5 especies nuevas dicha probabilidad es (redondeando) de 0.3, 0.2, 0.1, 0.03 y 0.01, respectivamente. Vemos entonces que tenemos una probabilidad aproximada de 0.9 de ver tres especies nuevas, o menos, en cinco días más de observación.³

¿Qué tan caro, o qué costo representa, quedarnos cinco días más en la selva para encontrar unas dos o tres especies más de vampiros? Ésa es la cuestión principal aquí. Dadas

especies, en caso de que la información extra que se podría obtener sobre el total de especies no justifique su costo.

Como vemos, el problema de clase sobre las canicas de colores en urnas representó la base para resolver un problema real, complejo e importante. A nosotros siempre nos interesa llevar al salón de clase aplicaciones donde se usen las técnicas en estudio. La probabilidad y la estadística son disciplinas indispensables para abordar problemas relevantes, ya sea de la ciencia y la técnica o de la vida cotidiana. Los cursos de probabilidad y estadística nos abren las puertas a un mundo poderoso, de conceptos profundos y grandes repercusiones, aun cuando los ejercicios de dados, barajas y canicas no nos lo muestren de golpe.

Desde luego que en esta exposición solamente hemos planteado el problema de la estimación del número de especies. Si el lector requiere más detalles técnicos, le sugerimos que nos contacte. Este trabajo aún está en desarrollo y por el momento sólo hemos atacado el problema dentro de una región y en un tiempo limitados. Un aspecto muy importante es observar el cambio de la biodiversidad en el espacio y el tiempo para saber más acerca de migraciones, cambios temporales y/o locales de especies, entre otras cosas. Además, sólo hemos considerado problemas de biodiversidad y es posible que el lector esté enfrentando otros problemas de diversidad que rebasan ese campo. Nos gustaría saber de ellos. ♦

³ Véase la nota 2.

La enseñanza de las matemáticas: la crisis de las reformas

JOSÉ ANTONIO DE LA PEÑA

El buen cristiano debe estar alerta en contra de los matemáticos y todos quienes hacen profestas vacuas. Existe el peligro de que los matemáticos tengan pacto con el demonio y la misión de ofuscar el espíritu del hombre para confinarlo a los linderos del infierno.

San Agustín

Hablando de las matemáticas, diré que las considero el ejercicio supremo del espíritu.

Blas Pascal

Para mi (¿buena o mala?) fortuna, los cambios en la enseñanza de las matemáticas en las escuelas mexicanas siempre me pasaron inadvertidos. La primera noticia que tuve de que había algo así como “matemáticas modernas” que comenzaban a ser enseñadas en la secundaria fue cuando mi hermano, un año menor que yo, tenía que realizar dibujos de *diagramas de Venn* y hablaba de *teoría de conjuntos*. Creo que el primer año en que estos conceptos fueron introducidos en la educación secundaria fue en 1971. Muy pronto lo serían también en el nivel de enseñanza primaria. Mientras tanto, yo avanzaba en mis estudios, en donde oí hablar de conjuntos por primera vez en tercero de preparatoria y nunca tuve que dibujar un diagrama de Venn (al menos no utilizando ese nombre).

En la mayor parte de los países avanzados se dieron importantes reformas educativas durante los años sesentas, siendo la enseñanza de las matemáticas uno de los ejes centrales de ese proceso. Poco a poco, esos cambios conceptuales fueron pasando a otros países y fueron adoptando diferentes formas, de acuerdo, por supuesto, con las características del medio local y la influencia de educadores y científicos prominentes. A esas primeras reformas se sucedieron otras

como respuesta a importantes críticas y reacciones y, posteriormente, como respuesta a los avances tecnológicos, fundamentalmente a la introducción de las computadoras en la enseñanza. Un texto satírico de las diferentes reformas educativas lo encontré pegado en la puerta del cubículo de un colega matemático en Canadá:

Un grupo de profesores del más alto nivel ha estudiado un problema que preocupa a la mayoría de los futuros instructores: la evolución de un problema de matemáticas. El siguiente ejemplo servirá de ilustración.

ENSEÑANZA 1960: Un campesino vende un saco de papas en 100 pesos. Sus gastos de producción son $\frac{4}{5}$ del precio de venta. ¿Cuál es la ganancia del campesino?

ENSEÑANZA TRADICIONAL 1970: Un campesino vende un saco de papas en 100 pesos. Sus gastos de producción son $\frac{4}{5}$ del precio de venta, esto es 80 pesos. ¿Cuál es la ganancia del campesino?

ENSEÑANZA MODERNA 1970: Un campesino cambia un conjunto P de papas por un conjunto M de monedas. El cardinal del conjunto M es igual a 100 y cada elemento de M es un peso. Dibuja 100 puntos grandes que representen los elementos del conjunto M . El conjunto G de gastos de producción tiene 20 puntos menos que el conjunto M . Responde la siguiente pregunta: ¿Cuál es el cardinal del conjunto B de beneficios? Dibújalo en rojo.

ENSEÑANZA RENOVADA 1981: Un agricultor vende un saco de papas por 100 pesos. Los gastos de producción son de 80 pesos y el beneficio del agricultor es de 20 pesos. Ejercicio: subraya la palabra *papas* y discute el problema con tu vecino de banca.

ENSEÑANZA REFORMADA 1981: Un campesino kapitalista se enriquece injustamente con 20 pesos por cada zaco de patatas que vende. Analisa el teksto y buska las faltas de ortografía y de gramatika y de puntuasion, di luego que pienzas de esa manera de enriqueerse.

ENSEÑANZA REFORMADA 1990: Un productor del espacio agrícola consulta el banco de datos de los precios de la papa para ese día. Con ayuda de su computadora (MS/dos con floppy y disco duro de 40 Mb) determina el flujo de dinero que obtendrá. Dibuja con el ratón de tu computadora el contorno de un saco de papas. Después conecta en línea tu computadora a la clave 3615 código PA (Papa Azul) y sigue las instrucciones del menú.

ENSEÑANZA 2000: ¿Qué es un campesino?

El tono del texto manifiesta la impresión del fracaso de las reformas que muchos matemáticos y educadores tienen. Sin embargo, la lista de personalidades que han intervenido en las modificaciones conceptuales de los planes y programas de estudio en los niveles elementales y medios en los diferentes países es impresionante.¹ ¿Qué es lo que ha fallado?

Antes de discutir sobre las virtudes y defectos de las reformas, revisemos un poco el porqué se tuvo en primer lugar la idea de que una reforma en la enseñanza tradicional de las matemáticas era necesaria.

El papel de la enseñanza de las matemáticas

El principal fin de todas las investigaciones sobre el mundo debería ser el descubrimiento del orden racional y la armonía con que Dios lo ha construido y que él nos ha revelado en el lenguaje de las matemáticas.

Johannes Kepler

En todos los periodos de desenvolvimiento cultural, las matemáticas han sido reconocidas como uno de los altos valores del conocimiento humano. En el siglo XVIII, toda persona educada se sentía obligada tanto a estar al corriente de los avances científicos importantes como a conocer la última obra del poeta de moda. Baste recordar cómo el pue-

blo londinense salió a las calles para acompañar el cortejo fúnebre de Newton.²

En nuestra época, aunque el conocimiento del público medio acerca de los avances científicos es muy pobre, se reconoce a las matemáticas como el fundamento de todas las ciencias y la tecnología. La importancia de la enseñanza de las matemáticas va, sin embargo, mucho más allá. En el nivel básico, se considera a las matemáticas como la introducción al pensamiento lógico y sistemático, como el conjunto de métodos para manejar los números y comprender el espacio. En el nivel medio y superior, se considera que constituyen el lenguaje por medio del cual se expresa el conocimiento del mundo físico, pero sobre todo se destaca el rigor y la exactitud que las caracterizan.

A lo largo de los años, las matemáticas fueron ganando espacio en la enseñanza. El matemático Pierre Samuel³ piensa que, en cierto momento, las matemáticas pasaron a jugar en Francia el papel que antes correspondía al latín. Entre las características comunes de estas dos materias cita las siguientes: la *falta de aplicación inmediata*, la *utilidad para los dirigentes* (el discurso pasa de ser *retórico* a ser *lógico*), la *abstracción* y la *objetividad en la selección* de los estudiantes que pasarán a formar la *élite* dirigente. Sin embargo, a lo largo de siglos (!), el contenido de los programas de matemáticas en los niveles educativos básicos se mantenía esencialmente constante y no distaba mucho de los conocimientos que ya tenían los griegos clásicos. Se enseñaba aritmética poniendo énfasis en el desarrollo de las habilidades para llevar a cabo operaciones mentalmente y se enseñaba geometría siguiendo el método axiomático trazado en los *Elementos* de Euclides. Todavía en 1964, Jean Dieudonné⁴ se indigna porque en los liceos franceses se concede gran importancia a temas tales como: 1) construcciones con regla y compás, 2) propiedades de triángulos, círculos y secciones cónicas y 3) fórmulas trigonométricas.⁵

² Según refiere Voltaire en las *Cartas persas*. Sin embargo, nos imaginamos que no se puede comparar con el cortejo fúnebre que acompañó a Lady Di.

³ P. Samuel, "Mathématiques, latin et sélection des élites", en R. Jaulin (ed.), *Pourquoi la mathématique?* En este sentido es digno de mencionar que la reforma educativa en tiempos de Napoleón incluía a las matemáticas y al latín como el centro de la enseñanza.

⁴ J. Dieudonné, en el Prólogo de su libro *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*.

⁵ Otra característica históricamente importante de la enseñanza de las matemáticas consistía en que éstas no eran consideradas propias para las mujeres. Todavía en 1963 el reporte oficial de la educación inglesa, conocido como *Newsom Report*, recomendaba que las muchachas hicieran a un lado el estudio de las matemáticas para favorecer el estudio de las humanidades.

¹ En los Estados Unidos se publicó en 1962 un informe llamado *On the Mathematics Curriculum for the High School* firmado por 75 matemáticos prominentes entre los que se contaban L. Ahlfors, G. Birkhoff, H. Coxeter, G. Polya y otros. En Europa, la influencia en diferentes momentos de J. Piaget, G. Papy, H. Freudenthal, J. Leray, J. Dieudonné y R. Thom ha sido notable.

Durante los años cincuentas y principios de los sesentas se empezaron a manifestar presiones en diferentes países en favor de cambios en los programas de enseñanza de las matemáticas en los niveles elementales y medios. Por una parte, los matemáticos y otros científicos profesionales consideraban que el desarrollo de sus ciencias hacía necesario un nuevo enfoque de la enseñanza de las matemáticas. Por otra parte, los desarrollos en psicología del aprendizaje (en particular los trabajos de Jean Piaget) provocaban en los pedagogos el deseo de modificar consecuentemente los programas de estudio y las técnicas de enseñanza.

Las reformas de los años sesentas y setentas

Para algunos autores,⁶ la fecha en que arranca la primera gran reforma en la enseñanza de las matemáticas puede fijarse en 1957. El lanzamiento ese año por los soviéticos del primer satélite *Sputnik* hace temer a los norteamericanos que su rezago científico se debe a un atraso educativo general. Por ello, deciden aumentar el gasto en educación y en ciencia y comisionan a importantes grupos de científicos para que asesoren al gobierno en la modificación de planes y programas de estudio desde los niveles elementales. En el informe *On the Mathematics Curriculum for the High School*, un grupo de matemáticos propone la introducción en la enseñanza de:

Las matemáticas modernas. En vista de la falta de conexión entre las diferentes partes del plan actual, los grupos que trabajan en la elaboración del nuevo plan harían bien en introducir conceptos generales unificadores. Pensamos que el uso de la teoría de conjuntos y de los conceptos del álgebra abstracta pueden dar más coherencia y unidad al plan de enseñanza secundaria.

La llamada *teoría de conjuntos* fue desarrollada a finales del siglo pasado y principios de éste principalmente por el notable matemático alemán Georg Cantor. Esta teoría permite formular con claridad ideas intuitivas tales como *infinito* y *cardinalidad* de un conjunto, y permitió demostrar formalmente que hay conjuntos infinitos que tienen diferente cantidad de elementos. Sin embargo, el *álgebra de los conjuntos*, es decir, las reglas de operación (intersec-

ción, unión, diferencia) entre conjuntos habían sido definidas y estudiadas años atrás por el matemático inglés George Boole. La expectativa de reducir el trabajo matemático a las reglas de operación entre los conjuntos fue tan notable que Boole tituló su obra *The Laws of Thought*. Para principios del siglo XX se consideraba a la teoría de conjuntos como la base fundamental de todas las matemáticas.⁷

En ciencias, el orden lógico en que se puede presentar una disciplina en los textos no es, en general, el orden histórico en que los descubrimientos fueron hechos. En matemáticas, el método axiomático iniciado por Euclides, alcanza su culminación con el uso sistemático de la teoría de conjuntos llevado a cabo por Nicolás Bourbaki,⁸ que a partir de 1940 inicia la publicación de una magna obra que pretende presentar todas las matemáticas. Según este enfoque, hay tres tipos fundamentales de estructuras en matemáticas (álgebraicas, de orden y topológicas) a partir de las cuales se pueden desarrollar los demás conceptos matemáticos. Pocos años después, en sus estudios de la psicología del aprendizaje, Jean Piaget asentó que en los niños de entre siete y ocho años de edad se encuentra desarrollado un equivalente de las *estructuras madres* de Bourbaki, lo que pone de manifiesto el carácter "natural" de dichas estructuras.⁹

La coincidencia de intereses entre grupos importantes de matemáticos y de pedagogos hizo que la dirección de la reforma fuera inevitable. La teoría de conjuntos se introdujo en el currículo de las escuelas secundarias primero y posteriormente en las primarias y aun en escuelas pre-escolares. Por supuesto, la reforma en la enseñanza de las matemáticas no vino sola. En realidad fue el eje de toda una reforma de la enseñanza elemental y medio. Por ejem-

⁷ Simultáneamente al éxito de la aproximación conjuntista de Cantor y de la formalización de gran parte de las matemáticas del siglo XIX se abre en matemáticas una *crisis de fundamentos* de una profundidad considerable. En efecto, a finales de siglo se descubren las primeras paradojas de la teoría de conjuntos (halladas por Burali-Forti, el propio Cantor y otros), sobre todo la paradoja del *conjunto de todos los conjuntos* de B. Russell: consideremos el conjunto A de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Si A es elemento de A, entonces no es elemento de A, absurdo. Si A no es elemento de A, entonces, por definición, A es elemento de A, ¡absurdo otra vez!

⁸ Nicolás Bourbaki es el nombre genérico usado por un grupo de distinguidos matemáticos franceses (entre los que se cuentan Cartan, Dieudonné, Chevalley, Weil, Serre). El nombre recuerda a un militar del ejército suizo que perdió todas las batallas en las que participó.

⁹ Véase por ejemplo, J. Piaget, *L'enseignement des mathématiques*, Neuchâtel, 1955, y *Remarques sur l'éducation mathématique*, Math. Ecole 58, 1973. Según Piaget, aparecen en el niño, en primer lugar, las nociones algebraicas, tales como $A - A = 0$; en segundo lugar, las estructuras de orden, tales como las seriaciones; por último, aparecen las nociones topológicas, tales como la idea de continuo, separaciones, etcétera.

⁶ Morris Kline, *Why Johnny Can't Add: the Failure of the New Math*, St. Martin Press, 1973.

plo, se introdujeron cambios en la distribución de las bancas en los salones de clase (pequeños grupos en lugar de filas viendo hacia el frente) y en la forma de dar clase del maestro (más atención individualizada y menos clase frente al grupo). En la Gran Bretaña el Comité Asesor para la Educación (conocido como *Plowden Committee* por ser presidido por Lady Plowden) adoptó las ideas de Piaget en el sentido de que: "hasta que un niño no está listo para el siguiente paso en el aprendizaje es una pérdida de tiempo tratar de enseñarle a darlo". Estas ideas se llevaron hasta el extremo de considerar que el juego es la principal forma de aprendizaje. Así, los niños eran puestos a trabajar en proyectos individuales o de grupo, mientras que el maestro se paseaba alrededor de la clase tratando de ayudar a cada grupo por turnos. Se llegó a considerar que el estudio de reglas de puntuación y gramática eran un obstáculo para el desarrollo de la creatividad del niño.

Culturalmente, la identificación de la *matemática moderna con las formas nuevas y revolucionarias de enseñanza* se convirtió en un lugar común. Al final de la película *Z* de Costa-Gavras se dice que la junta militar que acaba de tomar el poder ha prohibido, entre otras cosas, los libros de filósofos comunistas y las matemáticas modernas... y en la vida real, en 1976, cuando Jorge Videla toma el poder en Argentina, prohíbe, entre otras cosas, los libros de filósofos comunistas y la enseñanza de los vectores.

Contrarreformas y nuevas reformas

Las primeras reacciones contra la reforma en la enseñanza de las matemáticas se dieron probablemente en Francia. En 1970, René Thom¹⁰ hace una crítica severa tanto al optimismo excesivo generado por el uso de la teoría de conjuntos elemental como a la manera en que se enseña. Como ejemplo de las críticas informa que suele enseñarse que el símbolo conjuntista para la unión tiene un equivalente gramatical en la conjunción *o* y el símbolo para la intersección tiene un equivalente en *y*. Así, si digo "Juan es alto y moreno" se entiende que Juan pertenece simultáneamente al conjunto de los hombres altos y al conjunto de los hombres morenos. También, si digo "la bandera es azul y blanca" se debería entender que la bandera es azul y

simultáneamente es blanca (!). Por supuesto, en este caso no debe identificarse la intersección y el uso de la conjunción *y*. Pero, aun en los casos en que cabe hacer la identificación, los ejemplos de algunos manuales de teoría de conjuntos tienen escaso interés y una endeble relación con la realidad (como en "cubos grandes o azules" o bien en "parisinos calvos o ricos"). Thom afirma que estos ejercicios extraños e inútiles, de insistir en ellos, podrían convertirse en un peligro para el equilibrio intelectual de los niños.¹¹

Thom no pedía la eliminación total de la enseñanza de la teoría de conjuntos, sólo la ponía en su adecuada magnitud. Sin embargo, otros críticos fueron más duros; por ejemplo, el presidente de la Academia de Ciencias, M. Chaudron, afirmó que "toda una generación de jóvenes había sido sacrificada por una orgullosa fantasía". En la Gran Bretaña la reacción fue más lenta. En 1976, un reporte del Ministerio de Educación culpaba de los fracasos a los profesores y no a los métodos de enseñanza. El primer ministro James Callaghan decía que "los métodos progresivos producen excelentes resultados en manos calificadas, pero tienen dudosos resultados en los otros casos". Sin embargo, para 1988 se aprobó el Education Act que se alejaba deliberadamente de la filosofía del Comité Plowden.¹²

En los Estados Unidos uno de los críticos más elocuentes y de mayor influencia ha sido Morris Kline. En su libro *Why Johnny Can't Add: the Failure of the New Math* de 1973 se señalaba una serie de errores en los programas reformados (aparte de los ya indicados): empleo injustificado y abundante de símbolos, vocabulario pedante, olvido de motivaciones físicas, pobreza de los ejercicios, mediocridad de los autores de los programas, entre otros. Muchos de estos aspectos se han ido modificando con el paso del tiempo, pero aún se conservan en lo esencial los métodos de enseñanza, gran parte de ellos basados en las ideas que inspiraron las reformas de los años sesentas.

En un número reciente del *Notices* de la American Mathematical Society Roman Kossak dice que "el modelo actual de educación matemática [en los Estados Unidos, se

¹⁰ René Thom, *Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique?*, L'Age de la Science 3, 1970. Resulta interesante que este artículo fue escrito antes de que en México comenzara a enseñarse la teoría de conjuntos en secundaria.

¹¹ Hablando de equilibrio, el Institute de la Recherche sur l'Enseignement Mathématique de Grenoble publicó en 1980 un estudio muy interesante. Se le preguntó a un grupo de 97 niños de entre siete y nueve años de edad: "En un barco van 26 borregos y 10 cabras. ¿Cuál es la edad del capitán del barco?" Setenta y seis niños lograron calcular la edad del capitán a partir de los datos del problema.

¹² Véase el artículo "Plowden's Progress", en *The Economist*, junio 20-26, 1998. El informe en que se basó el Acta de Educación de 1988 criticaba principalmente las ideas de Piaget que durante veinte años habían evitado que los maestros tomaran una parte más activa en el aprendizaje de los niños.

entiende] probablemente va a ser recordado en la historia de la educación como un fracaso espectacular".¹³ Se nos informa que muchos de los estudiantes que ingresan a la universidad no saben mucho de aritmética o álgebra, no pueden trabajar en un nivel abstracto y no pueden relacionar las matemáticas con el mundo a su alrededor. Con esta entrada, Kossak argumenta la necesidad de un cambio urgente (más de veinte años después del libro de Kline) en el currículo de matemáticas de los niveles elemental y medio de las escuelas norteamericanas. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publicará el *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* donde evalúa el estado de la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles y hace propuestas para mejorar el contenido y métodos de enseñanza. La meta es lograr que los estudiantes desde el nivel elemental hasta la preparatoria consigan: 1) aprender el valor de las matemáticas; 2) confiar en sus habilidades matemáticas; 3) aprender a resolver problemas matemáticos; 4) aprender a comunicarse matemáticamente; 5) aprender a razonar matemáticamente. Por supuesto, esta meta es muy ambiciosa; para lograrla se requerirá de cursos especiales de preparación para los actuales maestros de matemáticas y una mejora sustancial en la preparación de los futuros maestros.

La reciente publicación de los resultados de un examen de conocimientos elementales de matemáticas practicado en las escuelas primarias de más de cincuenta países del mundo entero representó otro golpe más contra los *métodos progresivos* de enseñanza. Los Estados Unidos obtuvieron el lugar 15, más o menos a la par de otros países que dedican gran cantidad de dinero a la educación y defienden los métodos de enseñanza progresivos. Varios países asiáticos que dedican menos dinero *per cápita* a la educación y que jamás han modificado sus métodos tradicionales de enseñanza obtuvieron los primeros lugares.

Por lo que toca a México, no dispongo de datos concluyentes. Sólo puedo hablar de lo que he notado a lo largo de los años en conocidos que pasaron por las aulas estudiando "matemáticas modernas" y algunos pocos maestros de educación elemental. Creo que, más allá de problemas conceptuales, una dificultad fundamental es el bajo nivel académico del profesorado de los niveles elemental y medio. Aunque Piaget afirme que los niños desarrollan nociones

intuitivas de conjuntos a los seis años, la formalización abstracta de esas ideas requiere un poco de madurez y aprendizaje. Me parece que muchos maestros de primaria no pueden alcanzar fácilmente los niveles requeridos.¹⁴

En el *Libro para el maestro* de los diferentes grados escolares de primaria se expone lo que, a criterio de la Secretaría de Educación Pública (SEP), deberán ser las habilidades desarrolladas en los alumnos durante el grado correspondiente. Así por ejemplo, en el libro de quinto grado¹⁵ se dice que los alumnos deberán enfrentarse a situaciones didácticas que les permitan entre otras cosas:

—Desarrollar habilidades para utilizar y entender el significado de los números naturales de por lo menos siete cifras, de fracciones sencillas y de los números decimales y sus operaciones.

—Interpretar, construir y analizar tablas, así como construir gráficas relacionadas con problemas que involucren variación.

—Interpretar algunos fenómenos relacionados con el azar; entender y utilizar adecuadamente los términos que se relacionen con la predicción de algún evento o fenómeno a partir de la elaboración de tablas, gráficas o diagramas de árbol.

Vemos así que las reformas recientes en la enseñanza de las matemáticas en diversos países, México entre ellos, enfatizan en la necesidad de que los alumnos adquieran ciertas habilidades al presentárseles de manera sistemática "situaciones didácticas" convenientes. Después de muchos ensayos y errores, parece que ésta es la dirección correcta. En particular, y a diferencia de las reformas de los decenios anteriores, la reforma emprendida en México en los noventa al parecer cuenta con un amplio apoyo por parte de los maestros.¹⁶ Sin embargo, tenemos serias dudas de que los propósitos que han impulsado estas reformas educativas se consigan; peor aún, dudamos de que la mayoría de los maestros realmente busque desarrollar las habilidades deseadas

¹⁴ La enseñanza de la teoría de conjuntos en la primaria se eliminó en México en los años ochentas, mientras que en secundaria se continuó hasta hace poco tiempo. El *Libro para el maestro. Educación secundaria* (1994) informa que entre los cambios al programa anterior están "la desaparición de los temas de lógica y conjuntos", mientras que "se rescata un tema que formó parte de las propuestas originales de la Matemática Moderna": el uso de la calculadora.

¹⁵ *Libro para el maestro. Matemáticas quinto grado*, SEP, 1994.

¹⁶ Véase, por ejemplo, J. A. Pescador Osuna, "Evaluación de la Reforma de 1992", en *Educación* 2001, núm. 39, 1998. En este artículo se informa que la actitud de los maestros hacia la reforma educativa era favorable en 80% en 1992 y continúa siéndolo en 66% en 1998. Factores limitantes del optimismo respecto a las reformas son, por supuesto, las condiciones económicas, así como la falta de programas efectivos de preparación, actualización y superación profesional para el maestro.

¹³ Roman Kossak, "Why Are We Learning this?", *Notices AMS*, diciembre, 1995. En su artículo, Kossak critica muchas de las premisas usadas por la comisión que preparaba el NCTM Standards. Es claro que las discusiones seguirán todavía.

entre sus alumnos. En efecto, una rápida encuesta entre conocidos arroja el resultado temido: al igual que cuando nosotros estuvimos en la escuela primaria, el énfasis de la enseñanza de las matemáticas sigue estando en las mecanizaciones. En todo caso, pensamos que la SEP debería estudiar cuidadosamente cuáles son las habilidades que los maestros están *realmente* desarrollando entre sus alumnos y debería capacitarlos para que las metas deseadas puedan ser alcanzadas.¹⁷

La crisis que viene

Aunque la verdad matemática pueda ser hermosa, ésta sólo puede vislumbrarse después de mucho pensar. Las matemáticas son difíciles de comprender para muchos porque su estructura es jerárquica: un conocimiento se construye sobre otro y depende de él.

M. Holt y D. Marjoran.¹⁸

"Vivimos en un mundo dominado por matemáticos." Con estas palabras comienza el doctor Mike Smith su libro *Humble Pi*¹⁹ que tiene la intención de "liberar" la educación preparatoria de los Estados Unidos de la horda de matemáticos que "controlan todo lo que pueden" y "hacen sentir a todos como tontos". Desgraciadamente, como bien sabemos, los matemáticos no controlan la educación en ningún lugar del mundo, menos aún dominan el mundo.

Como queda claro al revisar el texto, *Humble Pi* fue escrito por alguien que no entiende matemáticas elementales, está dirigido a un público igualmente ignorante y hace recomendaciones que, de seguirse, garantizarán que nadie en los Estados Unidos entienda nada de matemá-

ticas.²⁰ Su discusión concluye que se debe dar libertad a los estudiantes de nivel preparatoria de elegir si quieren tomar clases de matemáticas y, en todo caso, se debe disminuir el número de horas dedicado a esta asignatura. Todo esto podría tomarse como una tontería inofensiva, de no ser por la atención que el libro atrajo inmediatamente en los Estados Unidos entre los medios de comunicación (Smith ya fue invitado a CNN) y aun entre algunos grupos vinculados con la educación.

Desgraciadamente, el caso descrito no es un fenómeno aislado. También en 1995, pero ahora en Alemania, se publicó el trabajo de habilitación en pedagogía de H. W. Heymann.²¹ La tesis principal del trabajo es que: "Siete años de enseñanza de matemáticas son suficientes; todo lo que el estudiante aprende de matemáticas después de ese tiempo no juega ningún papel en su vida adulta." Por ejemplo, Heymann sugiere que se elimine del currículo general el estudio de ecuaciones cuadráticas, logaritmos y el concepto de *función*, ya que "uno no puede ver funciones", entre otras cosas. Esta "noticia" atrajo la atención de la prensa de varias ciudades en Alemania y, al poco tiempo, Heymann se encontraba asesorando al gobierno de su estado en asuntos de educación.

La similitud de estos casos es clara. Aparentemente, el público en general y posiblemente los gobiernos quieren escuchar que hay que eliminar del currículo de educación media y media superior buena parte de las matemáticas que se enseñan. ¿Por qué? Tal vez porque las matemáticas no siempre son fáciles, tal vez por resentimiento o ignorancia, tal vez porque los conocimientos matemáticos no producen frutos inmediatamente. Probablemente los matemáticos, los científicos y los educadores en general han colaborado para que se dé este rechazo a las matemáticas al no conseguir una amplia aceptación social del importante papel que las matemáticas juegan (o deberían jugar) en la cultura. Sin duda, este rechazo se ha agravado por los fracasos de las reformas educativas. La percepción generalizada de la gente no es que el estudio de las matemáticas les permite de-

¹⁷ Algunos datos para documentar nuestro pesimismo respecto a los resultados que se van obteniendo en la educación matemática: en 1990 se llevaron a cabo dos exámenes nacionales, uno en primaria y otro en secundaria; el análisis de los resultados lo presentó Gilberto Guevara Niebla en "México: ¿un país de reprobados?", *Nexos*, 162, junio, 1991. El examen de primaria fue presentado por 3 248 niños de sexto grado que obtuvieron en promedio en matemáticas una calificación de 4.39; esta materia fue la de menor promedio entre las otras que formaron parte del examen. Recientemente, una encuesta (diseñada por el autor de este artículo y Michael Barot y realizada en la Ciudad de México por la Escuela de Trabajo Social de la UNAM) mostró que la pregunta: "Si al echar dos volados con una moneda normal obtiene usted águilas, ¿qué obtendrá con mayor probabilidad al echar el tercer volado?" Sólo era contestada correctamente por 38% de los encuestados (entre estudiantes de la UNAM se obtuvo un impresionante —por lo bajo— 47% de respuestas correctas).

¹⁸ En *Mathematics in a Changing World*, Walker NY, 1973.

¹⁹ M. Smith, *Humble Pi: The Role Mathematics Should Play in American Education*, Prometheus Books, 1995. El doctor Smith es profesor de educación y psicología en la Universidad de Tennessee. Una muy interesante revisión del libro es C. Plaut, "Eating Humble Pi", en *Notices AMS*, julio, 1995.

²⁰ Según la crítica de Plaut, Smith afirma que la multiplicación de fracciones es difícil de entender, discute la "realidad" de los números negativos y afirma que las matemáticas comenzaron su declive durante el siglo XIX. Entre sus conclusiones, recomienda que se dirija a los estudiantes hacia las actividades importantes en las que los norteamericanos se han distinguido: administración, publicidad, juegos de video y televisión de calidad.

²¹ H. W. Heymann: *Allgemeinbildung und Mathematik. Habilitationsschrift*, Universidad de Bielefeld, Alemania, 1995. Una discusión crítica por el matemático C. M. Ringel de este trabajo puede verse en la página del web de la Universidad de Bielefeld bajo el título *Sind sieben Jahre Mathematik genug?*

sarrollar sus capacidades de razonamiento lógico, sino que los faculta para realizar "cuentas" (¿para qué, si todos tenemos calculadoras?); las clases de matemáticas no les ayudan a resolver problemas importantes, sino que los obligan a aprender cosas extrañas e inútiles ("el conjunto de cubos grandes y azules").²²

Pero el rechazo de las matemáticas y su enseñanza debe entenderse en un contexto más general, el de la escasa penetración cultural que tiene la ciencia. Vivimos en una sociedad en que la gente no tiene idea alguna de las aportaciones de la ciencia, salvo una vaga noción de su relación con los servicios tecnológicos, como el teléfono y la televisión, y por supuesto desconoce si hay científicos trabajando en su país.²³ Esta pobreza de cultura científica de la sociedad tiene consecuencias graves. Por una parte, no es reconocida la importancia fundamental del trabajo de los científicos (paradójicamente, en un mundo cuyo funcionamiento depende cada día más de los avances científicos y tecnológicos). Por otra parte, los seudocientíficos y charlatanes (desde los astrólogos hasta los "científicos posmodernos") encuentran un campo propicio para imponer sus ideas y prácticas.²⁴

Estas tendencias sociales hacia la ignorancia de la ciencia y el oscurantismo en general pueden llegar a ser peligrosas. Es tarea de la comunidad científica, así como de todos aquellos que entienden el peso de la ciencia, y en particular de las matemáticas, trabajar en el afianzamiento de los valores culturales que creemos importantes. Los que estamos conscientes de que la enseñanza de las matemáticas es la forma más efectiva para desarrollar el pensamiento lógico, resolver problemas de todo tipo y comprender la naturaleza, debemos estar alertas. Cambios en la enseñanza de las matemáticas como los propuestos por Smith o Heymann, de llegar a imponerse en sus respectivos países, no tardarán en llegar al nuestro. En cualquier lugar donde esas ideas tengan eco ocasionarán graves efectos en la educación de generaciones de estudiantes.

²² Esta percepción, por supuesto, no es característica de México. Alguna vez en Alemania, una señora en un autobús me preguntó a qué me dedicaba, luego esperó el momento en que estaba yo a punto de bajar para decirme: "Matemático, debe ser horrible pasarse todo el día haciendo cuentas."

²³ Un ejemplo de la alarmante ignorancia de conocimientos científicos elementales por el público general queda mostrada en recientes encuestas. En los Estados Unidos, a la pregunta "¿Cuánto tiempo tarda la tierra en dar una vuelta alrededor del sol?" sólo la contestaron correctamente 48% de los encuestados (*Scientific American*, septiembre, 1998, p. 13). La misma pregunta hecha como parte de nuestra encuesta en la Ciudad de México (ver nota 17) fue respondida correctamente por 70% de los encuestados.

²⁴ Para una discusión de este punto véase mi artículo "Matemáticas para hermenéutas", revista *Universidad de México*, núm. 566, 1998.

Algunas conclusiones

¿Por qué fracasaron las reformas de los años sesentas y algunas posteriores? Cualquier respuesta corta que se dé a esta pregunta será una sobresimplificación. Sin embargo, creemos que las razones se encuentran en los siguientes puntos: 1) se realizó una reforma profunda después de mucho tiempo sin movimientos importantes y los cambios no fueron suficientemente ensayados antes de ponerse en práctica masivamente; 2) los maestros de los diferentes niveles educativos nunca comprendieron el contenido e importancia de las reformas propuestas y no fueron capacitados adecuadamente; 3) en la reforma de los sesentas (los setentas en México), se prefirió la adquisición de un lenguaje (el de la teoría de conjuntos) al desarrollo de habilidades en el estudiante (comprensión de situaciones y resolución de problemas).

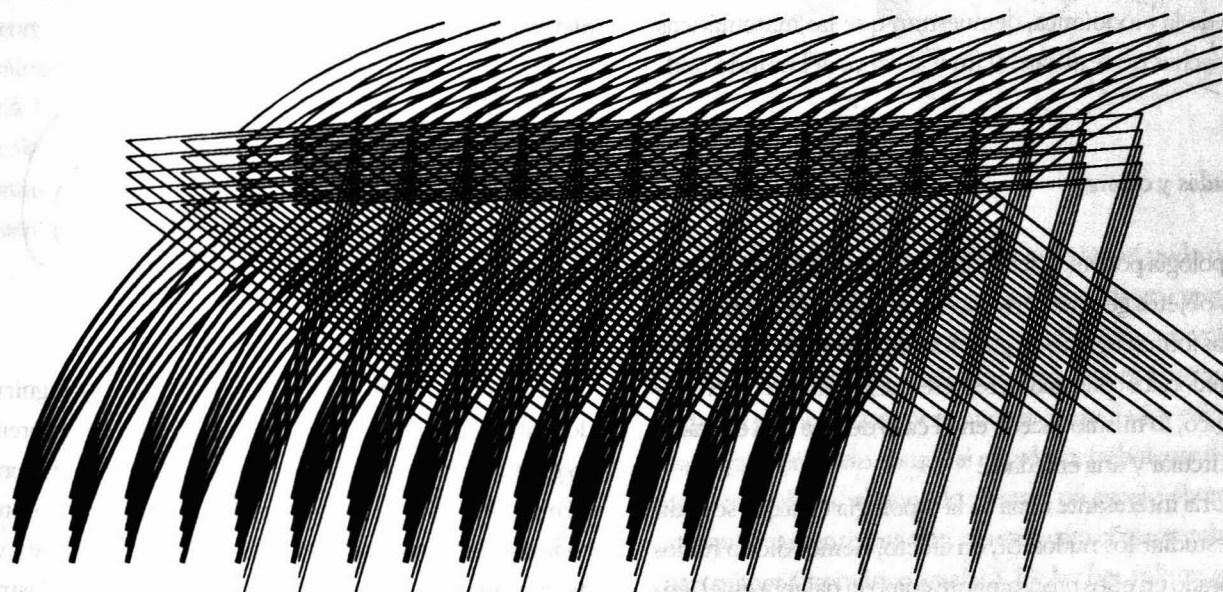
Aparentemente, después de estas crisis se ha llegado a propuestas de programas de enseñanza que, al hacer hincapié en la adquisición de ciertas habilidades por parte del alumno, parecen razonables.²⁵ Creemos que será muy importante el trabajo de capacitación de los maestros que se lleve a cabo en los países correspondientes para que las expectativas que se tienen puedan cumplirse. Sin duda se deberá trabajar más en conseguir transmitir a los estudiantes el gusto de aprender matemáticas. La componente lúdica en la enseñanza de las matemáticas puede ser fundamental para salvar los obstáculos de rechazo a su aprendizaje.

También un grave problema que tenemos enfrente es el de la falta de aceptación social de la ciencia y de las matemáticas en particular. De no trabajarse en este problema, algunas tendencias todavía marginales podrían llegar a imponer la idea de eliminar a las matemáticas del currículo en algunos niveles educativos, con catastróficas consecuencias. Finalmente, es necesario subrayar que el tiempo que se dedica a las matemáticas en los diferentes niveles educativos es importante; más aún, es posible que pronto se requiera dedicarles más tiempo (y no menos como algunos educadores opinan). En el caso mexicano basta recordar que todavía no se ha iniciado verdaderamente el uso de la computadora en la enseñanza. ♦

²⁵ Aquí me gustaría decir que no entiendo el porqué de la eliminación de la lógica del programa de secundaria. Creo que la lógica elemental podría enseñarse adecuadamente en clases de lectura de comprensión y análisis de textos, de manera que se tendiera un puente entre las dos asignaturas centrales del currículo: la lengua nacional y las matemáticas.

Nudos, enlaces y realidad

♦ CARLOS PRIETO ♦



1. Introducción

Las matemáticas deben una parte de su desarrollo a problemas que el mundo real plantea, problemas que al modelarlos matemáticamente crean teorías que se integran al acervo de conocimientos científicos de la humanidad. Sin embargo, hay otra parte no menos importante de las matemáticas que surge de la investigación per se, es decir, surge de la búsqueda que dentro del vasto universo de conceptos abstractos hacen los matemáticos. No obstante su origen, esta parte ha probado con creces que es tanto o más importante que la primera.

Las matemáticas son ciertamente un lenguaje, diríamos, tal vez el lenguaje en el que está escrito el mundo; también son una herramienta, sin la cual la ingeniería, la física y tantas otras disciplinas del conocimiento humano no podrían siquiera existir; son asimismo una ciencia que plantea sus propios problemas y tiene su forma particular

de abordarlos, muchas veces, incluso, en forma experimental; y son también un arte que, al exigir del cerebro humano creatividad suprema, pueden hundirlo en profunda desesperación o proporcionarle enorme satisfacción. Son, por esto último, también una forma de vida, una estructura del pensamiento, una invitación a penetrar en un mundo de ideas y conceptos propios de las mismas matemáticas, en el que pueden hacerse los más asombrosos descubrimientos. Podría pensarse que este carácter conlleva el riesgo de alejar las matemáticas cada vez más del otro mundo, del mundo real, mas no es así. En muchas ocasiones hay ideas, teorías, conceptos matemáticos que repercuten contundentemente en otras disciplinas años después de haber sido creados. Es a lo que se le ha llamado la insensata eficacia de las matemáticas (véase Wigner).

En este trabajo se hará alusión a una teoría, más por su belleza intrínseca que por su eficacia al aplicarla, sin embargo, a algunas de sus importantes aplicaciones también

nos referiremos. Es momento éste para acentuar el hecho de que no es la topología la única que se utiliza en tales casos, sino que en esta incursión en las fronteras del conocimiento la acompañan otras áreas de las matemáticas, como el álgebra, la combinatoria, la teoría de las categorías, el análisis, la estadística, etcétera. Esto es un reflejo de que la matemática, lejos de estar conformada por parcelas más o menos aisladas, constituye un edificio completamente interconectado; en otras palabras, las matemáticas son una sola ciencia y no un conglomerado de áreas.

Las aplicaciones de la topología, en compañía de otras de las ramas mencionadas, en algunas áreas de la física teórica o de la bioquímica, demuestran que las matemáticas bien hechas no se alejan, al fin y al cabo, del mundo real.

2. Nudos y colores

La topología podemos definirla como el estudio cualitativo de los objetos geométricos. No se preocupa de las medidas o de las formas rígidas; un globo desinflado y uno inflado, ya sean redondos o alargados, representan el mismo objeto topológico, lo mismo sucede en el caso de una liga estirada, una circular y una enredada.

Una interesante rama de la topología es la que se dedica a estudiar los nudos. Sí, en efecto, hemos dicho nudos y pensado en ellos precisamente como la palabra en el lenguaje llano lo indica. Los nudos, además de ser de utilidad para marinos y representar un reto para jóvenes exploradores, constituyen un concepto que ha sido abstraído por los científicos y que actualmente es objeto de investigación muy seria en matemáticas.

Tomemos un cordel y hagamos un nudo con él. Si dejamos los cabos sueltos es posible deshacer el nudo pasando estos extremos por los lugares adecuados. Sin embargo, si después de hacer el nudo fijamos los cabos a una pared o los unimos uno con otro muy probablemente ya no podamos deshacer el nudo; más generalmente, si hacemos dos nudos y unimos los extremos de cada uno probablemente tampoco sea posible modificar uno de aquéllos para hacerlo igual al otro. Son este tipo de problemas y su abstracción matemática lo que constituye la teoría de los nudos.

Matemáticamente, un *nudo* lo podemos definir como una curva (1-dimensional) situada en el espacio (3-dimensional), de manera que comienza y termina en el mismo punto. Las figuras de la lámina 1 representan varios ejemplos de nudos, el primero de los cuales está "desanudado" y

se le llama *nudo trivial*. La cuestión de decidir si dos nudos son *equivalentes*, es decir, si es posible deformar uno, sin cortarlo, para convertirlo en el otro, puede precisarse matemáticamente, aunque en los casos sencillos que contiene la lámina es más o menos evidente. No procederemos a hacerlo en este ensayo y nos apegaremos a la idea intuitiva que hemos introducido. No obstante, sí vale la pena notar que la lámina 1 no presenta realmente ilustraciones de los nudos, sino lo que podríamos designar como su *proyección regular*, es decir, una imagen plana que muestra cuándo una porción del cordel pasa por "delante" y cuándo lo hace por "detrás" de otra. Es más bien con estas proyecciones, que codifican completamente el nudo, con las que trabajaremos.

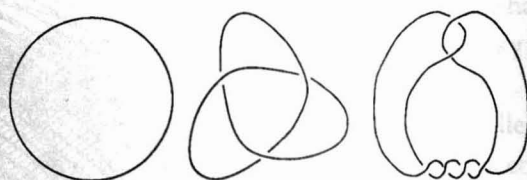


Lámina 1

Con el objeto de abordar el problema de distinguir nudos introduciremos un procedimiento al que llamaremos *juego de los colores* y es como sigue. Tómese una rueda con un número impar n de rayos distribuidos uniformemente, a cada uno de los cuales se le asigna un color (r = rojo, v = verde, a = amarillo, m = morado, z = azul), como lo ilustra la lámina 2; para el caso, $n = 5$.

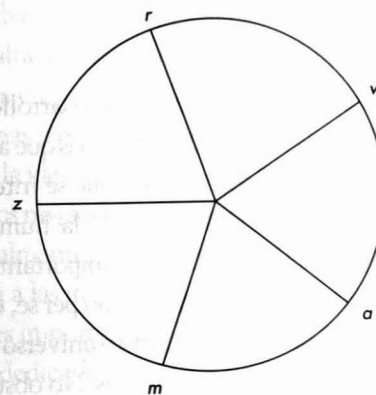


Lámina 2

Usando los n colores distintos de la rueda, iluminemos cada uno de los arcos de la proyección de un nudo siguiendo las siguientes reglas:

1. Deben usarse al menos dos colores distintos.
2. En un cruce, el color del arco que pasa por delante debe ser el que corresponde a la bisectriz (única) del ángulo.

lo que forman los rayos con los colores de los arcos que inciden en el cruce y pasan por detrás.

Estas reglas las ilustra la figura de la lámina 3.

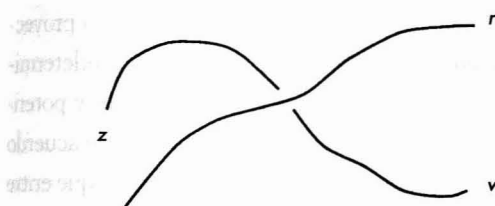


Lámina 3

Por ejemplo, el llamado *nudo de la figura ocho* o, simplemente, *nudo ocho*, K_8 , que se presenta en la figura A de la lámina 4, está iluminado usando los cinco colores de la rueda de la lámina 2 de modo que cumple con las reglas del juego; sin embargo, el *nudo trébol* T de la figura B de la misma lámina no es posible iluminarlo con los cinco colores de acuerdo con las reglas del juego.

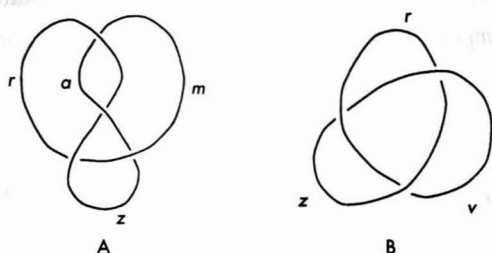


Lámina 4

Por otro lado, si en vez de utilizar una rueda de cinco colores, utilizamos una de tres, como en la figura de la lámina 5, sí es posible iluminar el trébol. Fácilmente podemos verificar, sin embargo, que no es posible iluminar el ocho con tres colores.

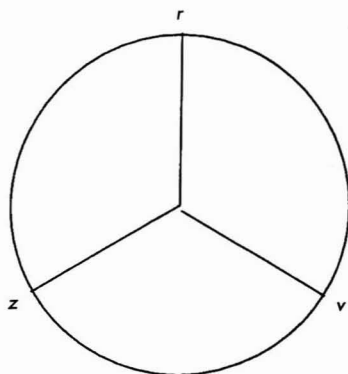


Lámina 5

Más aún, si tomamos un nudo y una de sus proyecciones regulares puede ser iluminada con n colores respetando

las reglas del juego, entonces es fácil probar que cualquiera otra de ellas puede serlo también. El número de colores requerido para iluminar la proyección de un nudo es un *invariante* del nudo. Al mínimo de estos números n lo llamaremos *número cromático*. Así, el nudo ocho tiene como número cromático el 5, pero no el 3, y el trébol tiene el 3, pero no el 5. Podemos concluir que el *nudo ocho* y el *nudo trébol* no son equivalentes. No podemos modificar uno, sin cortarlo, para obtener el otro.

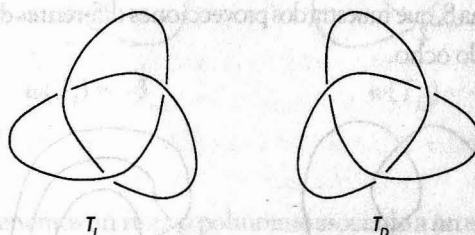


Lámina 6

Las figuras de la lámina 6 representan el nudo trébol y su imagen especular (como se ve a través de un espejo). De aquí surge la pregunta de si estos nudos son equivalentes. Tal vez la experiencia cotidiana nos permita aventurarnos a decir que no lo son, pero nuestro juego de los colores no basta para probarlo, ya que si uno de los tréboles se ilumina con tres colores, al ponerlo frente a un espejo obtenemos automáticamente una iluminación para el otro: ambos tienen número cromático igual a 3. De hecho, vale en general que si un nudo tiene número cromático n , su imagen especular también tiene número cromático n .

A continuación describiremos un nuevo juego para distinguir con más precisión los nudos.

3. Nudos, enlaces y polinomios

Podemos considerar dos o más nudos que no estén separados del todo, sino que estén enlazados, así obtenemos precisamente un *enlace*, como lo muestran las figuras de la lámina 7, donde vemos dos nudos triviales no enlazados (A), dos nudos triviales con un enlace llamado *enlace de Whitehead* (B) y dos nudos trébol doblemente enlazados (C).

El número cromático, que definimos antes, no distingue nunca a un nudo de su imagen especular. ¿Serán éstos siempre equivalentes, es decir, será todo nudo *anfiquiral*?

Introduciremos ahora un nuevo invariante, más fino que el número cromático. Las proyecciones regulares de nu-

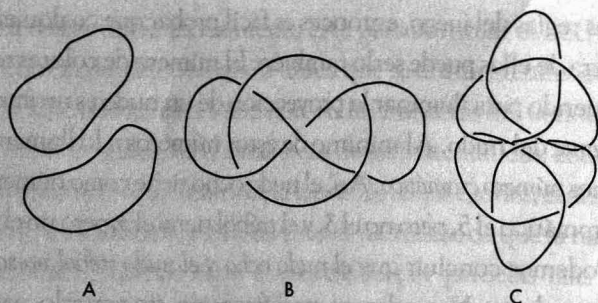


Lámina 7

dos equivalentes pueden ser muy distintas, como se ve en la lámina 8, que muestra dos proyecciones diferentes del mismo nudo ocho.

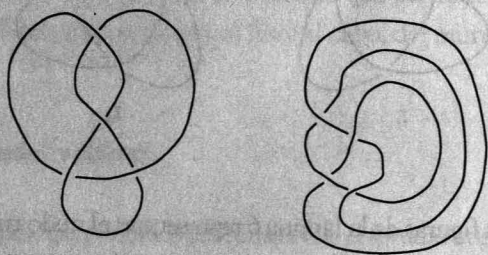


Lámina 8

Asimismo, enlaces equivalentes pueden tener proyecciones muy distintas. El matemático alemán Kurt Reidemeister probó un teorema que permite pasar de una proyección regular de un enlace a cualquier otra, a través de ciertas modificaciones conocidas como *jugadas de Reidemeister*, que se llevan a cabo como lo ilustran las figuras de la lámina 9. Mediante estas jugadas se pueden modificar porciones de nudos o enlaces mientras que las partes restantes se mantienen sin cambios (véase, por ejemplo, Burde y Zieschang). Se les conoce como jugadas de Reidemeister de tipos I, II y III.

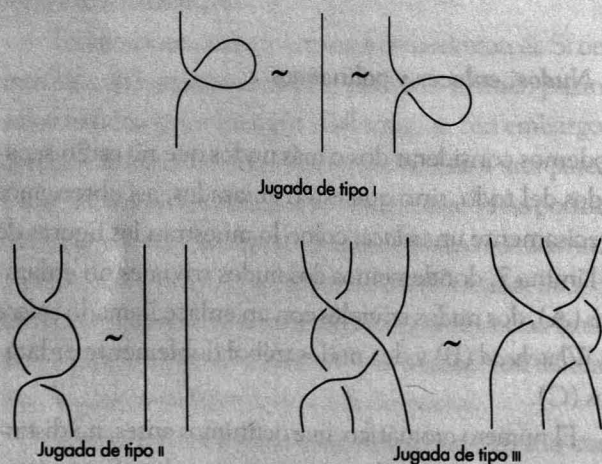


Lámina 9

El teorema de Reidemeister afirma que *dos nudos son equivalentes si y sólo si se puede pasar de alguna proyección re-*

gular de uno a alguna del otro, llevando a cabo un número finito de jugadas de tipo I, II o III (y, en caso necesario, una deformación del plano).

Definiremos ahora el llamado *corchete de Kauffman* (véase Kauffman: 1988 y 1991), que asocia a una proyección de un nudo o enlace un polinomio en la indeterminada x , con números enteros como coeficientes y potencias positivas y negativas de la indeterminada, de acuerdo con las siguientes fórmulas de recurrencia, en las que entre corchetes escribimos sólo una porción del nudo suponiendo que el resto del nudo no se altera:

$$1. [\text{X}] = x [\text{X}] + x^{-1} [\text{X}]$$

Esta regla dice que si venimos caminando por un "paso superior" podemos cambiarlo yendo a la izquierda y multiplicando el corchete del nudo o enlace más sencillo que resulta por x y yendo a la derecha y multiplicando el corchete del nudo o enlace resultante por x^{-1} y sumando ambos resultados.

Ejemplo:

$$[\text{X}] = x[\text{X}] + x^{-1}[\text{X}]$$

$$2. [K \sqcup O] = (-x^2 - x^{-2}) [K]$$

Esta regla dice que si un enlace tiene una componente que es un nudo trivial desenlazado podemos eliminarla si multiplicamos el corchete del nudo o enlace que queda por $(-x^2 - x^{-2})$.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} [\text{X}] &= x[\text{X}] + x^{-1}[\text{X}] \\ &= x(-x^2 - x^{-2})[\text{X}] + x^{-1}[\text{X}] \\ &= -x^3[\text{X}] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} [\text{X}] &= x[\text{X}] + x^{-1}[\text{X}] \\ &= x(-x^2 - x^{-2})[\text{X}] + x^{-1}[\text{X}] \\ &= -x^3[\text{X}] \end{aligned}$$

$$3. [O] = 1.$$

Esta regla, finalmente, dice que el corchete de la proyección del nudo trivial es el polinomio trivial 1.

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} [\text{X}] &= -x^3[\text{X}] \\ &= (-x^3)(-x^3) = x^6 \end{aligned}$$

Ahora podemos terminar el cálculo del corchete de Kauffman correspondiente al nudo trébol. Faltaba por calcular

$$\begin{aligned} [\bigcirc] &= x[\bigcirc] + x^{-1}[\bigcirc] \\ &= x(-x^3) + x^{-1}(x[\bigcirc] + x^{-1}[\bigcirc]) \\ &= -x^4 + 1 + x^{-2}(-x^2 - x^{-2}) \\ &= -x^4 - x^{-4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para el nudo trébol izquierdo tenemos que

$$\begin{aligned} [T_I] &= [\bigcirc] = x(x^6) + x^{-1}(-x^4 - x^{-4}) \\ &= x^7 - x^3 - x^{-5}. \end{aligned}$$

Si tomamos la imagen especular de la proyección de un nudo, lo único que cambia es la orientación, por lo que cambia "derecha" por "izquierda"; así, la regla 1 implica que en el corchete de la imagen especular aparecen las potencias de x con los signos opuestos. Por lo tanto, para la proyección del nudo trébol derecho se tiene que

$$[T_D] = [\bigcirc] = -x^5 - x^3 + x^{-7}.$$

Ambas proyecciones tienen, consecuentemente, polinomios diferentes.

Es un ejercicio sencillo verificar que si se modifica la proyección de un nudo con jugadas de Reidemeister de tipos II o III su polinomio no se altera. Sin embargo, la jugada de tipo I sí lo cambia:

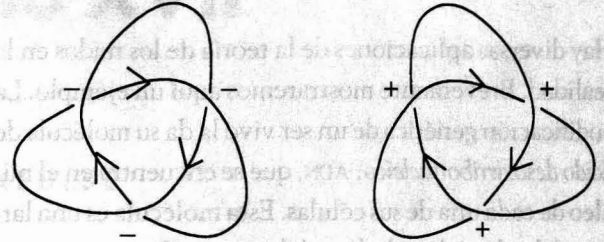
$$\begin{aligned} [\text{---} \searrow \swarrow] &= -x^3[\text{---} \swarrow \searrow], \\ [\text{---} \swarrow \searrow] &= -x^{-3}[\text{---} \searrow \swarrow]; \end{aligned}$$

por lo que el corchete de Kauffman no es un invariante de nudos ni de enlaces. Para obtener uno que sí lo sea, se define el *torcimiento* $w(K)$ de la proyección regular de un nudo o enlace K de la siguiente forma. Désele a cada componente del enlace una orientación y cuéntense en su proyección los cruces positivos y los negativos, según las figuras de la lámina 10.



Lámina 10

Entonces $w(K)$ es el número de cruces positivos menos el número de cruces negativos. Por ejemplo, como se aprecia en las figuras de la lámina 11, el trébol izquierdo T_I tiene torcimiento -3 y el derecho T_D , $+3$.



$$w(T_I) = -3$$

$$w(T_D) = +3$$

Lámina 11

Tenemos un nuevo polinomio asociado a un enlace K definido por

$$f_K(x) = (-x^3)^{-w(K)} [K].$$

Éste sí es un invariante de nudos, como es fácil verificar, ya que también es invariante bajo la jugada de Reidemeister de tipo III. En particular, tenemos

$$\begin{aligned} f_{T_I}(x) &= (-x^3)^3(x^7 - x^3 - x^{-5}) = -x^{16} + x^{12} + x^4, \\ f_{T_D}(x) &= (-x^3)^{-3}(-x^5 - x^3 + x^{-7}) = x^4 + x^{-12} - x^{-16}, \end{aligned}$$

por lo tanto, el nudo trébol izquierdo T_I y el nudo trébol derecho T_D no son equivalentes, es decir, el nudo trébol no es anfiqueiral.

Puede probarse, para un nudo K , que el polinomio $f_K(x)$ tiene siempre potencias múltiplos de 4, por lo que conviene simplificarlo, sustituyendo x por $t^{-1/4}$, para obtener el llamado *polinomio de Jones* de K , $V_K(t) = f_K(t^{-1/4})$ en potencias de la indeterminada t , (véase Jones). En particular,

$$V_{T_I}(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4},$$

$$V_{T_D}(t) = -t^4 + t^3 + t.$$

Se puede demostrar que para el valor absoluto n del polinomio de Jones que se alcanza al tomar $t = -1$, $n = |V_K(-1)|$, se puede iluminar el nudo K con n colores como se explicó en la primera parte de este trabajo. En el caso del trébol, $|V_{T_I}(-1)| = 3 = |V_{T_D}(-1)|$. Es un buen ejercicio calcular el polinomio de Jones del nudo ocho K_8 , para obtener

$$V_{K_8}(t) = t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2},$$

y verificar que $|V_{K_8}(-1)| = 5$, que es el número cromático de K_8 .

4. Nudos y realidad

Hay diversas aplicaciones de la teoría de los nudos en la realidad. Brevemente mostraremos aquí un ejemplo. La codificación genética de un ser vivo la da su molécula de ácido desoxirribonucleico, ADN, que se encuentra en el núcleo de cada una de sus células. Esta molécula es una larga y delgada cadena helicoidal que, en algunos casos, es circular, es decir, ignorando la hélice y la estructura química local, se trata de una curva cerrada simple, que está anudada. Por ejemplo, éste es el caso para la bacteria *Escherichia coli*; asimismo, una molécula de este tipo puede ser producida *in vitro* a partir de una molécula lineal. Siendo la fórmula química de esta molécula la misma, el nudo (o enlace) que ésta forma puede variar; es decir, se pueden tener distintos isómeros de la molécula, que corresponden a variedades biológicas diferentes. Hay enzimas naturales llamadas *topoisomerasas*, que actúan en forma específica en cruces de la molécula cambiando los pasos superiores por inferiores, como lo muestra la lámina 12 (a esto se le llama *recombinación en sitio específico* [véase Sumners]); es decir, cambian en forma controlada la molécula de ADN por un isómero que, como nudo, es, en general, distinto. Estas enzimas tienen distintos nombres, de acuerdo con la forma como actúan.

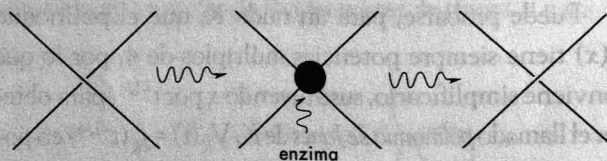


Lámina 12

No sólo ha habido aplicaciones de la teoría de nudos en el estudio de la topología del ADN y, con ello, para la predicción del tipo topológico de la molécula resultante, sino que los propios problemas que plantea la manipulación genética han impulsado la investigación en teoría de nudos para darles respuesta matemática. La lámina 13 muestra un enlace (*catenane*) producido por la enzima Tn3-resolvase en ADN de forma I y nudos trébol izquierdo y derecho de dsADN generados por la topoisomerasa de ADN de *E. coli* que actúa en ADN de forma II. ♦

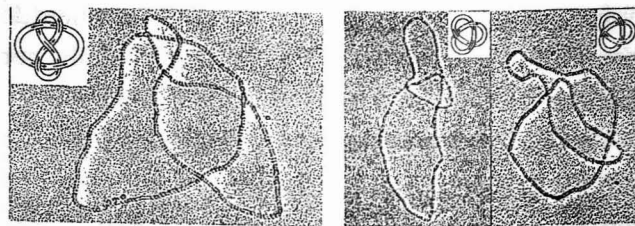


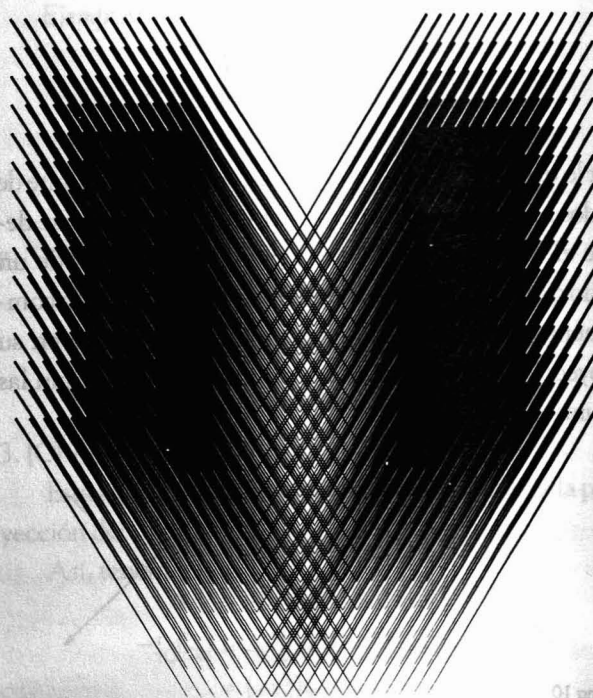
Lámina 13

Catenane producido por Tn3-resolvase actuando en ADN de forma I

Nudos trébol izquierdo y derecho de dsADN generados por topoisomerasa de ADN de *E. coli* actuando en ADN de forma II

Referencias

- Burde, G. y H. Zieschang, *Knots*, Walter de Gruyter (Gruyter Studies in Mathematics, 5), Berlín, 1985.
- Jones, V. F. R., "A Polynomial Invariant for Links Via Von Neumann Algebras", en *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 129, 1985, pp. 103-112.
- Kauffman, L. H., "New Invariants in the Theory of Knots", en *Amer. Math. Monthly*, vol. 95, núm. 3, 1988, pp. 195-242.
- Kauffman, L., *Knots and Physics*, World Scientific (Series on Knots and Everything, 1), Singapur, 1991.
- Sumners, De W., "Untangling DNA", en *The Mathematical Intelligencer*, vol. 12, núm. 3, 1990, pp. 71-80.
- Wigner, E. P., "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", en *Communications in Pure and Applied Math.*, vol. 13, 1960, pp. 1-14.



El arte barroco y los números imaginarios en México en el siglo XVII

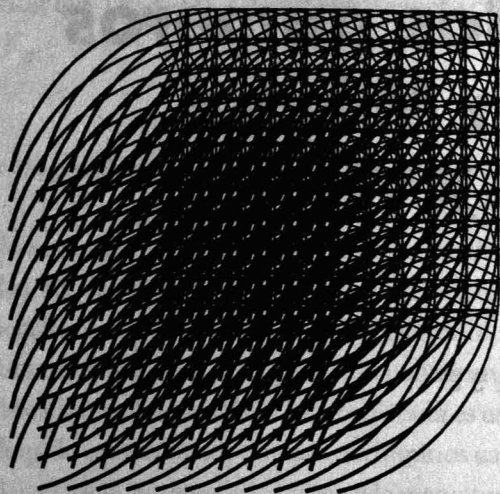
ELÍAS TRABULSE

Las matemáticas que se estudiaban en México hacia el año de 1630 no eran otras que las del Renacimiento: geometría clásica, álgebra, aritmética y trigonometría. Lugar relevante ocupaba la ciencia de los números, a la que podemos llamar “aritmósófia”, pues como heredera de la vieja tradición hermético-pitagórica intentaba determinar el papel de los números en la aprehensión de la idea de belleza basada en una armonía o un equilibrio. Por otra parte, desde el punto de vista matemático el mundo astronómico de las esferas y los círculos planetarios era tan armonioso que resultaba fiel retrato de su Creador, tal como lo afirmó fray Luis de Granada en su *Introducción al símbolo de la fe*. Asimismo se pensaba que existía una correspondencia entre los conceptos numéricos y algunas de las artes. En el siglo XVII Leibniz, inmerso todavía en esta tradición, afirmaba que la música era un cálculo efectuado por el espíritu sin percatarse de que estaba contando, es decir que la música era una relación numeral “sentida”. Con ello retomaba la idea agustiniana y neoplatónica que decía que la esencia del arte estaba en el número, o incluso llegó a asegurar que el arte no era sino la expresión más elevada de una aritmética interior e inconsciente. Y aquí en la Nueva España, un monje mercedario, Diego Rodríguez, sostenía que la música estaba formada de “series numerales concretas”. En suma, desde el punto de vista de estos matemáticos y astrónomos la armonía entre macrocosmos y microcosmos era evidente e incluso aritméticamente demostrable, pues los números eran realidades y no meras abstracciones.

Tanto en Europa como en México los problemas que invalidaban estas teorías empezaron a surgir cuando se difundieron las teorías planetarias de Kepler y el álgebra superior de los matemáticos italianos de finales del siglo XVI. Esto

no quiere decir que la vieja “aritmósófia” abandonara el campo sin más. Ya vimos a Leibniz, uno de los descubridores del cálculo diferencial, haciendo diversas referencias a esa idea del cosmos. Kircher es otro ejemplo y Sor Juana también. Y es que las teorías científicas tardan en morir, y mientras más antiguas más tardan. Sin embargo desde mediados del siglo penetraron en la Nueva España esas nuevas tesis que empezaban a socavar el orden tradicional y la armonía de los números y las esferas.

La apertura de la cátedra de astrología y matemáticas en 1638, regentada por el padre Rodríguez, permitió que se difundieran entre algunos intelectuales mexicanos las teorías de Kepler acerca de la verdadera configuración de los espacios celestes. Sus famosas tres leyes planetarias rompían la idea de la armonía de los círculos, tan caros a la vieja astronomía, sea tolemaica o copernicana, y le daban al cosmos ya no un centro único, fuera el sol o la tierra, sino varios centros, pues las órbitas descritas por los planetas no eran círculos sino elipses, es decir figuras con dos focos, figuras desdobladas, imágenes en el espejo. Además, estas elipses no las formaban los planetas —como en el cosmos de Copérnico— siguiendo velocidades uniformes, sino aceleradas. El espacio adquiriría fuerza dinámica, era el resultado de vectores que operaban en un espacio no limitado, acaso infinito. Kepler mismo, espantado ante este descubrimiento, afirmó que el pensamiento de la infinitud del universo implicaba un “horror secreto”, pues el hombre se sentía errante “en medio de esa inmensidad —decía— a la cual se ha negado todo límite, todo centro, y por ello mismo todo lugar determinado”. Retrato preciso, si lo hay, del espacio barroco. Pero otros elementos vinieron a sumarse a este desquiciamiento. En efecto, si de la cosmología pasamos a la



teoría de los números que la sustentaba, el derrumbe será total, pues los nuevos descubrimientos algebraicos demostraron la existencia de números que no eran reales ni podían serlo. Y esos números siempre habían existido junto a las series reales que revelaban la armonía del cosmos y la naturaleza del arte. Éstos eran los terriblemente subversivos números imaginarios.

Cuando fray Diego Rodríguez resolvió un cierto caso de la ecuación de tercer grado encontró que existían raíces que no eran reales, es decir que estaban formadas por la raíz cuadrada de un número negativo. Como lo hiciera Descartes por esas mismas fechas, el padre Rodríguez las declaró "falsas" y las rechazó por imposibles. Pero a medida que avanzaba en sus estudios algebraicos se dio cuenta de que los números no reales eran difíciles de evitar y —derrotado— terminó, como sus colegas del otro lado del Atlántico, por aceptar su existencia. Así entraron en México los números "imaginarios", es decir aquellos números que no eran reales pero que paradójicamente sí existían. Apenas podemos comprender la transformación mental que supuso este descubrimiento. Era la aceptación de la realidad de lo imaginario. Hacia el final de sus voluminosos manuscritos de álgebra, el padre Rodríguez capitulaba y aceptaba la existencia de lo que por definición no podía existir. Su solución personal y originalísima de las ecuaciones de cuarto grado ya incluye raíces imaginarias. Pero no todos aceptaron tan fácilmente esta revolución en los números que corría paralela a la revolución en los círculos y las elipses planetarias. Leibniz rechazó su existencia cuando afirmó irónicamente que los números imaginarios eran "un excelente y maravilloso refugio del Espíritu Santo, una especie de anfibio entre ser y no ser"; y todavía en el siglo XVIII Euler los describió como "nada, o menos que nada". Los números imaginarios

y las elipses planetarias son las dos caras de una misma revolución conceptual que incluso sus realizadores aceptaron con dificultad pero que terminó por imponerse. Ahora bien, es evidente que semejantes postulados no iban a dejar intactas a las ideas estéticas, porque, bien visto, ¿no al hablar de elipses, de desdoblamientos, de espejos, de espacios ilimitados, de la realidad de lo imaginario, estamos hablando de los elementos constitutivos del arte barroco? Sin embargo, aquellos términos no son categorías estéticas sino matemáticas o astronómicas que los historiadores trasladaron al mundo de las artes. No es casual que la elipse o la hipérbola (una especie de elipse infinita) sean figuras literarias propias de esta época, ni tampoco es casual que el espacio arquitectónico nos dé la impresión de infinitud con sus perspectivas engañosas. Y en el caso específico del barroco mexicano varios estudiosos lo han caracterizado como una huida hacia lo ficticio, lo aparente, lo ilusorio, que adquiere a menudo las formas de una fuga musical en donde "lo fáctico trata de alcanzar en desenfrenada carrera a lo imaginado". Y estas imágenes repetidas acaban por adquirir un sentido de verdad y de realidad. Con todas las distancias guardadas, esto bien podría ser el epítome de la difusión de las matemáticas modernas en México en el siglo XVII y no solamente del arte barroco. Así, no es difícil evocar una Nueva España donde los pintores, arquitectos y literatos compartían, acaso sin saberlo, los presupuestos teóricos que se enseñaban en la cátedra universitaria de matemáticas.

Y es que tanto la cosmología kepleriana como los números imaginarios tienen también sus virtudes estéticas, pues la matemática tiene su propia belleza aunque en este caso no sea la belleza clásica provista de una voluntad de equilibrio, sino una belleza peculiar —barroca, inmersa en ese vértigo que da la presencia real de lo inexistente—. Es por ello que las matemáticas y el arte del siglo XVII parecen sobrevolar los dominios de lo empírico, de los hechos irreductibles y obstinados, y buscan ambos captar intuitivamente lo desconocido.

Las aptitudes del espíritu matemático para evadirse de la realidad física nunca fueron tan obvias como en esta época en que ese espíritu dejó traslucir su verdadera naturaleza estética al bautizar a los números que antes eran seguras y amadas realidades con nombres tales como números irracionales, complejos, ideales, trascendentes, imaginarios, que nos manifiestan una terminología muy poco científica, que más busca eternizar emociones estéticas que encontrar definiciones claras y distintas. Y es que la intuición artística tiene certidumbres que el empirismo no conoce. ♦

Las matemáticas nos dan seguridad

RAFAEL FERNÁNDEZ FLORES

Desde luego que el título de este artículo no alude a la seguridad personal, entendida como el aplomo con el que Humphrey Bogard se conduce en la pantalla, para envidia de Woody Allen. Se refiere, más bien, a las aplicaciones que las matemáticas tienen en el desarrollo de mecanismos para proteger la información que circula en las cada vez más numerosas redes de cómputo.

El provecho que podemos obtener de una computadora aislada se multiplica enormemente cuando la hacemos formar parte de una red (*Entre los individuos como entre las computadoras, la unión hace la fuerza*). Podemos hacernos una idea de una red de computadoras a partir de la de teléfonos. De hecho, muchas veces las computadoras se enlazan —“enredan”— a través de las líneas telefónicas.

Cada teléfono conectado a la red tiene la posibilidad de establecer comunicación, es decir, proporcionar y extraer información, con cualquier otro aparato en la red. Imaginemos ahora que cada teléfono tuviera integrada una diminuta cámara de video y que, al establecerse la comunicación con nuestro aparato, la persona que llama tuviese acceso visual a nuestro domicilio.

Para empeorar la situación supongamos que la cámara de video pudiera ser teledirigida por quien hizo la llamada, de manera que sin mucha dificultad sería capaz de inspeccionar si la cocina está limpia, las camas tendidas o si guardamos algunos objetos de valor y en dónde se encuentran. Agreguemos algún mecanismo para poder sustraer, mediante el teléfono, los bienes y el esquema estará completo. Con aparatos telefónicos de esta naturaleza ten-

dríamos que ser sumamente cuidadosos al proporcionar nuestro número telefónico.

Algo muy semejante es lo que ocurre cuando nuestra computadora se encuentra formando parte de una red. En principio, cualquier máquina conectada a la red puede establecer contacto con la nuestra y, de esta manera, el usuario de aquella tendría la posibilidad de inspeccionar qué guardamos en ella y, eventualmente, de llevarse algunos archivos. Sin embargo, la solución de “desenredar” o desenlazar nuestra computadora es tan útil como la de desconectar nuestro teléfono; nos aísla.

Un primer paso para proteger la información de nuestra computadora consiste en limitar el ingreso a ella mediante la asignación de claves. A partir de ello, para acceder a una máquina dentro de una red no sólo será necesario conocer su dirección —el equivalente al número telefónico—, sino además proporcionar una contraseña que identifique a quien solicita la conexión como alguien previamente autorizado por el responsable de la computadora a entrar en ella, inspeccionar su contenido, retirar, colocar o modificar archivos.

Esta solución no es perfecta, en la medida en la que las contraseñas se pueden robar o descifrar. Crear contraseñas seguras, escribir mensajes en clave (encriptar) y traducirlos (desencriptar), certificar y autenticar usuarios se han vuelto entonces actividades indispensables en la construcción de un universo de intercambio —incluido el comercial— electrónico, que parece ser el futuro ineluctable de sociedades donde el recurso no renovable más importante es el tiempo.

En todas estas tareas las matemáticas desempeñan un papel muy importante. La codificación o encriptamiento debe ser una labor fácil de realizar en una dirección —la de cifrado— y difícil en la otra —la de desentrañamiento—. Obsérvese que en eso consiste precisamente el caso entre multiplicar factores primos para obtener un número (operación relativamente sencilla) y la descomposición en factores primos (proceso que puede volverse muy complicado).

Los mecanismos de cifrado consisten en reemplazar el texto original por otro que se construye a partir de él de acuerdo con algún algoritmo. Existen varios de estos métodos y todos nosotros seguramente hemos jugado, de niños, a escribir mensajes secretos. La forma en que posiblemente lo hacíamos era sustituir cada letra del alfabeto por otra. Por ejemplo, en la novela *2001 Odisea del espacio* aparece una computadora de nombre HAL. Parece evidente que éste es el nombre cifrado que se obtiene de IBM cuando sustituimos cada letra por su antecesora en el orden alfabético.

Este procedimiento es obviamente generalizable a un corrimiento del alfabeto de n lugares para cualquier n menor o igual a 26. Actualmente los mensajes escritos mediante este mecanismo son relativamente fáciles de descifrar, pues basta aplicar un programa de cómputo que reemplace el mensaje que se quiere decodificar por el que se obtiene al recorrer el orden alfabético uno, dos, tres... veintiséis veces y observar cuál es el que tiene sentido. Éste es un método de descifrado que podemos calificar de "fuerza bruta", pero las computadoras modernas lo hacen viable.

En el método descrito anteriormente todas las letras del alfabeto se recorren los mismos lugares, por lo que bastan 26 intentos para romper el código. Un mecanismo más complejo de desciframiento consiste en asignar, mediante una regla arbitraria, a cada letra del alfabeto otra, que puede incluso en algún caso ser ella misma. En este esquema existen para cada una de las 26 letras 26 posibles asignaciones, por lo que el método de la fuerza bruta requiere 26^2 intentos, para asegurar la ruptura del código.

Pero aun esta forma de esconder los mensajes puede resultar poco segura, pues una vez que se descubre qué carácter corresponde a cada letra, esta asociación se mantiene a lo largo de todo el texto. Una manera de dificultar la lectura del mensaje cifrado consiste en hacer que la regla de sustitución cambie a lo largo del mensaje. Para lograr esto podemos auxiliarnos de una palabra secreta que llamamos llave o clave. Ejemplifiquémoslo construyendo la siguiente tabla o matriz:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z
C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B
E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C
F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D
G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E
H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G
J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
R	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
S	S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
S	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
T	T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
T	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
U	U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
U	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
V	V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
V	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
W	W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
W	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
X	X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
X	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
Y	Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
Y	X	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T</					

Usemos como palabra clave MATEMÁTICAS

Para codificar cualquier otra palabra, por ejemplo, MENSAJE, haremos una correspondencia entre las letras de la clave y la palabra a ser cifrada:

Clave: M A T E M Á T I C A S

Palabra: M E N S A J E

Ello da como resultado parejas de letras: MM, AE, TN...

Si usamos estas parejas como entradas en la matriz, es decir, si buscamos en la primera línea horizontal la primera letra de la pareja, en el caso que nos ocupa M, y en la primera línea vertical la segunda letra, que es también M, y después buscamos qué elemento de la matriz corresponde a esas coordenadas, encontramos las siguientes relaciones:

A la entrada MM en la matriz le corresponde la letra Y; a la entrada AE, la E; a TN, la F, etcétera. Así, al terminar de asignar todas las correspondencias tendremos que MENSAJE se transformó en YEFWMJX. Para aumentar la dificultad de su resolución, podemos cifrar por segunda vez el mensaje con una segunda clave, y así sucesivamente.

La labor de encriptamiento, aunque notablemente más simple que su inversa, puede volverse fastidiosa en extremo si se realiza manualmente. Hoy en día estos algoritmos pueden efectuarse con auxilio de las computadoras electrónicas. Antes se realizaron con la ayuda de ingeniosas máquinas mecánicas, como la célebre *Enigma* usada por los alemanes durante la segunda Guerra Mundial. Un interesante relato acerca de la manera en que funcionaban estos aparatos y de cómo los aliados lograron descifrarlos puede leerse en el libro *Codebreakers*, de Stuart Milner.

Conociendo la palabra clave y la matriz, es posible pasar del mensaje cifrado al texto original. Descifrar los mensajes codificados mediante este mecanismo por pura fuerza bruta puede ser una tarea sumamente difícil.

Obviamente el gran problema de estos métodos de cifrado consiste en la manera de mantener secreta la llave, pues ésta debe ser conocida por quienes reciben los mensajes para poderlos leer.

Una sofisticación del procedimiento de codificación consiste en utilizar un par de llaves: una pública y una privada. La llave pública es usada por quienes quieren enviar un mensaje, para cifrarlo. El mensaje codificado sólo puede ser leído con ayuda de la llave privada, y ésta sólo la conoce el destinatario del texto, además obviamente del emisor. El mecanismo de generación de parejas de llaves para que cumplan estas condiciones puede resultar complicado. Existen varios algoritmos para generar parejas de llaves. Uno de ellos fue desarrollado por Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman, de RSA Data Security.

Otro punto en el que el cifrado de archivos se vuelve importante es en la certificación de su origen y contenido, pues se correrían riesgos si, por ejemplo, alguien intercepta un mensaje entre dos personas, lo altera y lo reexpide al destinatario original, quien no advierte el cambio del texto y toma el contenido del mensaje como verdadero, con las previsibles fatales consecuencias. O bien, en el caso de que alguien envíe a través de la red un mensaje en el que dice ser alguien que no es. Prevenir este tipo de riesgos ha llevado a desarrollar mecanismos de certificación y firma digital que se basan también en métodos de encriptamiento.

Por ejemplo, para asegurar la integridad de un mensaje, no su confidencialidad, puede usarse el siguiente procedimiento: el emisor codifica el texto con su llave privada y envía al receptor ambos mensajes, el cifrado y el normal. El receptor descifra el texto con la llave pública; si esto es posible, significa que el texto proviene de la única persona que conoce la llave privada, es decir, el emisor. A continuación, el receptor compara el texto que acaba de decodificar con el texto normal y comprueba si tiene o no alteraciones. Variantes de este procedimiento se usan para crear firmas digitales que acreditan la identidad del signatario.

Digamos para terminar que algunos de los algoritmos más populares de codificación utilizan las propiedades de las curvas elípticas. No es el propósito de este texto ahondar en el estudio de estos bichos, digamos únicamente que son conjuntos de puntos sobre los que se puede definir la operación de adición y la de multiplicación por un entero positivo por iteración de la suma. La suma cumple las propiedades necesarias para que los matemáticos digan que este conjunto es un grupo Abelian, es decir que la suma cumple

la propiedad de ser conmutativa o, en otras palabras, el orden de los sumandos no altera el resultado.

Escogida de común acuerdo una curva elíptica y un punto perteneciente a ella, un grupo de usuarios puede construir, a partir de la multiplicación del número seleccionado por números enteros, sus llaves públicas y usar números aleatorios como su clave secreta.

El esquema funcionaría de la siguiente manera: cada uno de los miembros del grupo selecciona al azar un número entero y lo utiliza como su llave secreta y da a conocer el producto de ese número aleatorio por el punto previamente escogido de la curva como su llave pública.

Cuando uno de los usuarios desea mandar un mensaje debe multiplicar la llave pública de aquel a quien quiere enviar el mensaje, el receptor, por la llave privada de quien lo envía, el emisor, y usar ese número como clave para construir el bloque de codificación (el equivalente, toda proporción guardada, a la palabra MATEMÁTICAS, que se usó como clave para encriptar un mensaje en la forma de YEFWMJX).

Debido a la conmutatividad del grupo, el receptor puede calcular el número clave con el que se construyó el bloque de cifrado —y por lo tanto ser capaz de descifrar el mensaje— efectuando la multiplicación de su propia clave secreta por la llave pública de quien le envía el mensaje.

La seguridad del esquema reside en la dificultad de factorizar la llave pública de cada usuario, que es —recorremos— el producto de un número aleatorio, la llave privada, por un número conocido, el punto de la curva elíptica.

Para que eso ocurra es necesario que la selección de la curva y el punto se realice de acuerdo con ciertos criterios cuyo cumplimiento implica el conocimiento de algunos algoritmos, como el de Schoof, y de teoremas, como el de Weil, que se ocupan de las propiedades de las curvas elípticas y sus puntos.

Quienes se interesen en los aspectos técnicos relacionados con la utilización de las propiedades de estas curvas para crear esquemas de encriptamiento, así como de sus aplicaciones para producir firmas digitales, pueden encontrar interesantes los libros *A Course in Number Theory and Cryptography*, de Neal Koblitz, y *Elliptic Curve Public Key Cryptosystem*, de A. J. Menezes. El primero fue editado por Springer-Verlag en 1994 y el segundo por Kluwer Academic Publications en 1993.

Al llegar a este punto no puedo dejar de pensar en las personas que invariablemente preguntan a quienes estudian matemáticas: ¿y para qué sirven las matemáticas? En la respuesta, aparte de su principal mérito, que es el ser bellas, se puede expresar: para darnos seguridad. ♦

Piero della Francesca: pintor y matemático

J. RAFAEL MARTÍNEZ

In memoriam Ricardo Torres Alcaraz (Trin)

Hoy día Piero della Francesca (c. 1412-1492) es reconocido como uno de los pintores seminales del Renacimiento. Sus obras son consideradas arquetipos de ese portentoso despliegue técnico de quienes comenzaban a dominar la naciente ciencia del trazo en perspectiva, la llamada *costruzione leggitima*, gracias a la cual objetos y personajes representados en una pintura parecían habitar un espacio pictórico real. Este simple hecho habría bastado para cimentar la fama de Piero. Sin embargo, su figura resulta también excepcional por haberse forjado, de manera independiente a su talentos artísticos, una reputación como matemático.

Poco se sabe de la vida de Piero y, a pesar de formar parte de la lista de ilustres artistas incluidos en la colección de relatos biográficos debida a Vasari (Vite, 376-380), no es hasta el siglo XIX que el mundo del arte volvió los ojos hacia su obra. Nació en el pequeño pueblo de Borgo San Sepolcro (hoy Sansepolcro) y realizó su trabajo en sitios relativamente poco importantes; éstos, sin embargo, se han convertido en templos a cuyos muros acuden como peregrinos los amantes del arte. Ejemplo paradigmático de esta situación es el relativo a *La flagelación de Cristo*, una de las más famosas y apreciadas obras del Renacimiento, que permaneció casi desconocida hasta principios del siglo pasado. Cuando los historiadores del arte posaron su atención en ella, Della Francesca era recordado más como artesano versado en las disciplinas matemáticas que como pintor.

Durante el siglo XIX Piero era tenido por autor de varios tratados matemáticos, aunque de ellos sólo se cono-

cían tres. *La flagelación*, por su parte, se apreciaba como una obra menor, aunque curiosa, que reflejaba sus intereses como matemático; también destacaba en la pintura la presencia “de una necesaria y generosa ley” que ligaba nuestras percepciones con la óptica y las matemáticas (Guston, *Della Francesca*, p. 38).

Estas consideraciones proponen un marco de referencia para entender de manera unitaria su legado artístico y matemático y captar así la pureza matemática bajo la que se acomodaban las formas que, flotando “cual joyas en el aire transparente y la argentina luz”, se posaban en los espacios claramente definidos por Della Francesca (Venturi, *Storia*, p. 464).

Hacia una teoría de la pintura: arte, óptica y matemáticas

A fines del Medievo los vínculos más estrechos entre la ciencia y el arte ocurrieron en el seno de lo que se entendía por óptica. Esta disciplina aportó los elementos teóricos para que pintores, escultores y arquitectos desarrollaran técnicas con el fin de generar la ilusión de un espacio consistente y racional donde se distribuían objetos tridimensionales representados con las proporciones correctas —tamaños relativos— entre unos y otros (Lindberg, *Theories*, pp. 122-177). Además, sugería cómo imitar la acción de la luz natural para denotar relieves. Muestra de su pertinencia para la pintura es que los dos primeros escritos teóricos sobre el tema, el *De la pintura* de León Battista Alberti (1435) y los *Commentarii* de Lorenzo Ghiberti (1478), de-

dicaron una de las tres partes que los componen a discutir los usos de la óptica en el arte.

El de Alberti es un tratado corto donde expone lo que constituye una teoría de la pintura y presenta la ciencia de la perspectiva de los artistas o *perspectiva artificial*, con lo que la distingue de la óptica tradicional, conocida en el Renacimiento como *perspectiva naturalis* o *communis* (Ackerman, *Renaissance Science*, p. 99). Para algunos, este tratado de arte es el más original y el que mayor influencia ha tenido a lo largo de la historia. Esto podría ser algo exagerado, pero lo que sí es un hecho es que, con su publicación, Alberti creó un octavo arte liberal —que se sumaba a las tres disciplinas del *trivium* y las cuatro del *cuadrivium*— y situó al artista en la posición de intérprete del orden que se manifestaba a través del universo visible. Entusiasmado con las matemáticas de la luz y del espacio, el pintor semejaba un dios que contemplaba su propia belleza en los reflejos de la naturaleza.

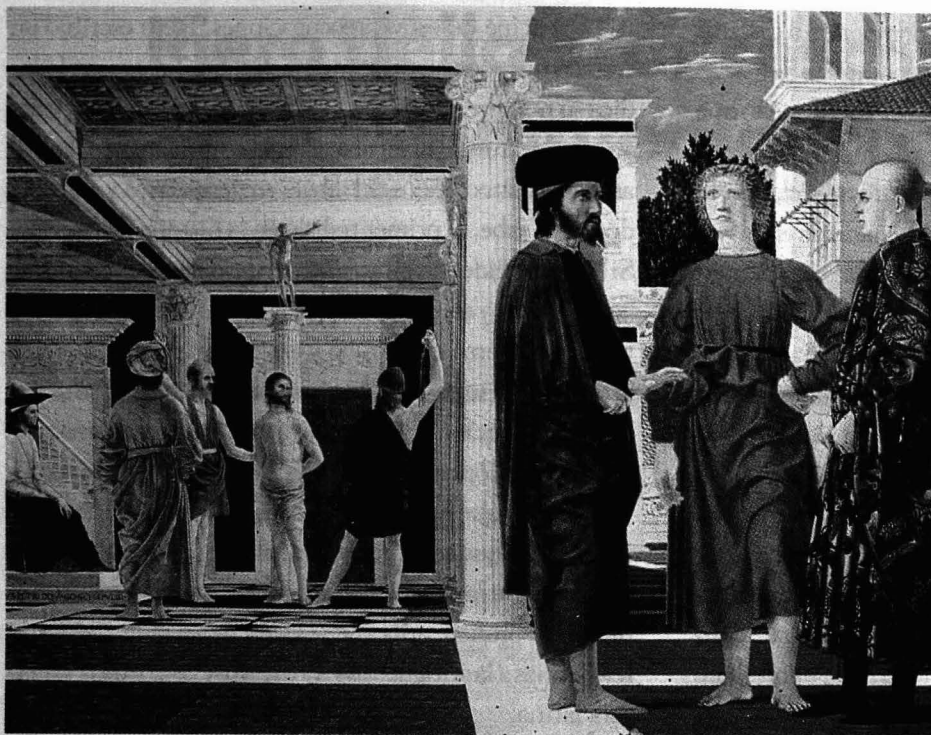
Alberti, uno de los más preclaros ejemplos del humanismo florentino, abre su Libro I señalando que “en aras de un discurso claro, al escribir ... acerca de la pintura, tomaré de los matemáticos aquellas cosas que parezcan relevantes para el tema. Cuando éstas sean aprendidas, intentaré ... explicar el arte de la pintura a partir de los principios básicos de la naturaleza”. Lo cual aparentemente sitúa la obra dentro de la tradición de las ciencias aplicadas que eran de uso común en talleres y *botteghe* o escuelas de oficios. Sin embargo, lo cierto es que *De la pintura* es un tratado didáctico de corte humanista, compuesto en el espíritu de los escritos de Cicerón, Séneca y Quintiliano y, por lo tanto, leído y estudiado principalmente por una elite intelectual que pululaba en las cortes y que tenía acceso a las nuevas bibliotecas de quienes veían en la cultura y sus productos una comodidad que halagaba sus vanidades a la vez que exhibía su grandeza (Jardine, *Worldly Goods*, pp. 3-34).

El texto de Ghiberti corresponde a otra tesitura y, al igual que *Il libro dell'arte* de Cennino Cennini (1390), está dirigido primariamente a los nuevos pintores que aprendían el oficio en alguno de los múltiples talleres donde se les entrenaba en cuestiones prácticas y teóricas, mismas que resultaban muy lejanas de lo que las universidades enseñaban. Por su parte, y hasta donde ha sido posible establecerlo, el *Tratado de pintura* de Leonardo no encaja en ninguna de estas categorías, apunta más bien en todas direcciones, busca seducir al rico patrono con las posibilidades de su ingenio, aconseja al no iniciado sobre el uso de las sombras y los efectos atmosféricos y guía al más experimentado por las complejas rutas de la perspectiva.

Partícipe de estas preocupaciones, Piero escribió un tratado que toca un aspecto de la pintura. Tal y como lo indica su nombre, *De prospectiva pingendi* (Sobre la perspectiva para la pintura) es un texto donde se abordan con rigor los aspectos matemáticos del dibujo en perspectiva y es, hasta donde se sabe, el primer trabajo en la historia en hacerlo. Si bien coincide con el de Alberti en la importancia que concede al tema y en el respeto que Euclides le merece, ambos tratados difieren en el tono y el tipo de lector al que van dirigidos. En su caso, Alberti presenta las ideas básicas para la construcción en perspectiva, en términos de una geometría y una óptica elementales aun para su época; aporta un ejemplo que parecería condensar el universo de situaciones a las que se enfrentaba el pintor y, evitando la presentación de largos y complicados pasajes repletos de tecnicismos, prefiere atiborrar al lector de un largo desfile de referencias a la antigüedad y a los textos clásicos de la literatura latina.

Contrastando con la estrategia albertiana, Piero no cita a los antiguos, excepto al inicio del Libro III del texto en cuestión (*De prospectiva pingendi*), donde brevemente aborda algunas cuestiones de los antiguos *trattatisti*. A lo largo de casi toda la obra muestra su dominio sobre el tema de la construcción geométrica de las configuraciones: avanza paso a paso por cada una de ellas, como si guiara la mano del lector al trazar punto por punto y línea por línea. Esto, sin embargo, no hace que el tratado de Piero sea una versión para pintores a la manera de Euclides. La preocupación fundamental del autor es el proceso de la construcción de la estructura geométrica de la pintura, sin ocuparse de axiomas y de casos generales. Sólo excepcionalmente aporta lo que podrían considerarse demostraciones de teoremas. Para darnos cuenta de qué tanto se aparta del ideal euclidiano en el que los trazos se realizan más en la mente que sobre una superficie concreta, basta con señalar que propone obtener las proyecciones sobre un plano de una cierta figura recurriendo a “un hilo de la más pura seda” o a “un pelo de la crin de un caballo”. Tampoco se puede insertar *De prospectiva pingendi* entre los tratados de óptica, ya que plantea sólo un número reducido de principios de carácter óptico y no se ocupa de los vínculos entre la luz y el funcionamiento del ojo. A lo que más se acerca el tono de este texto es a la llamada geometría práctica, que se incluía en los tratados de ábaco que comenzaban a proliferar en las escuelas de oficio de la Italia renacentista (Grendler, *Schooling*, pp. 306-322).

La matemática y la óptica que maneja Piero della Francesca pertenecen, en cuanto al desarrollo científico, al pe-



La flagelación de Cristo, 1455, Palacio Ducal, Urbino, tomada de Georges Holmes, *Renaissance*, St. Martin's Press, Nueva York, 1996.

riodo medieval tardío. Sus afanes matemáticos se inscriben en la tradición de los manuscritos conocidos como libros de ábaco, que adoptaron como modelo el *Liber abaci* de Leonardo de Pisa (c. 1170-1250); su interés por la óptica los sitúan más cerca de la *Perspectiva communis* (c. 1279) de John Pecham que de los textos ópticos, más matematizados, de Witelo.

Piero poseía un amplio conocimiento de los trabajos de Euclides, tanto de los *Elementos* como de la *Óptica*, y el que su obra no utilice el estilo euclidiano refleja, por lo tanto, que sus intereses estaban más del lado de las aplicaciones, sin que esto signifique que pasaba por alto el valor del modelo euclidiano y el sustento que aportaba la filosofía natural. Su dominio de las disciplinas matemáticas era tal que Vasari no duda en afirmar que de no haberse dedicado a la pintura bien podría haberse ganado la vida como matemático.

Los tratados matemáticos

Tres son los tratados de Piero que se conservan y que hoy son conocidos como el *Trattato d'abaco*, el *Libellus de quinque corporibus regularibus* y el ya mencionado *De prospectiva pingendi*. El primero sigue el formato de los textos —o notas— utilizados en las escuelas de ábaco y su propósito era enseñar el tipo de matemáticas que resultaban útiles en las actividades

comerciales del siglo xv; estos textos en particular habían cobrado un auge inusitado en los ámbitos del comercio “internacional”. A su vez, estas matemáticas comprendían lo que se conocía como aritmética, pero que hoy describiríamos en parte como álgebra elemental (Giusti, *Pacioli*, pp. 15-18). Aparentemente, la obra fue escrita para algún amigo; la mayor parte de los problemas que incluye se pueden encontrar en tratados realizados previamente por otros autores. Sin embargo, en lo que concierne a los problemas geométricos, mismos que resultan más numerosos de lo acostumbrado en ese tiempo, hay una gran originalidad, en especial en lo referente a las figuras tridimensionales.

Apegado a sus modelos, el *Trattato d'abaco* carece de un discurso de tipo teórico y busca enseñar a través de la presentación de problemas numéricos ordenados según su grado de complejidad. Un ejemplo, tomado de entre las primeras páginas, ilustra claramente esta manera de proceder: “Se tiene un pez que pesa 60 libras. La cabeza pesa $\frac{3}{5}$ del peso del cuerpo y la cola $\frac{1}{3}$ del peso de la cabeza. Pregunta: ¿cuánto pesa el cuerpo?”

A un estudiante de nuestro sistema de enseñanza media superior se le aconsejaría que manejara este problema de manera algebraica, por lo que el peso del cuerpo del pez sería la variable desconocida x . Éste no es el proceder de Piero, quien sólo usa números, y que da inicio a la resolución del problema de esta manera: “Haz lo siguiente: supón que el cuerpo pesa 30 libras. Resulta que $\frac{3}{5}$ de 30 es 18, que corresponde a la cabeza; la cola pesa $\frac{1}{3}$ del peso de la cabeza, lo cual da 6. Sumando 30, 18 y 6 da 54; y lo que se quiere es que resulte 60, lo cual se obtiene si se le suman 6.” Prosigue con varias sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, cuyo sentido se entiende a la luz de ejemplos anteriores, y termina diciendo: “Y entonces el cuerpo pesa $33 \frac{1}{3}$, la cabeza 20 y la cola $6 \frac{2}{3}$, que sumados dan 60, como se había dicho que pesaba el pez.”

El mismo estilo es utilizado en los problemas de tipo geométrico cuya inclusión, cabe mencionar, distingue a esta obra del tratado de ábaco típico. Con todo, los problemas

en general son presentados de manera abstracta, aun cuando se expresen en términos numéricos: "Se tiene un triángulo ABC cuyo lado AB mide 74, el BC 15 y el AC 13, y se quieren trazar en él los 2 círculos más grandes posibles. Pregunto cuál es su diámetro." Este problema no aparece en los *Elementos* de Euclides, pero ciertamente es una variante algo más complicada de la construcción correspondiente a la Proposición 4, Libro 4 del texto euclidiano: "En un triángulo inscribir un círculo." Llama la atención que en el libro de Piero, justo en la página anterior al problema antes expuesto, se presenta la resolución de un caso especial del problema de Euclides, el de un triángulo rectángulo de diez *bracci* por lado. Esta tendencia de dividir los casos generales de Euclides en varios más sencillos y luego ir combinándolos hasta llegar al caso general no hace sino repetir la estrategia seguida por la tradición *abaccista* en el esclarecimiento de problemas aritméticos o algebraicos (Field, *The Invention of Infinity*, pp. 62-65).

La mayor parte de los problemas del *Trattato d'abaco* que se ocupan de calcular alturas y áreas o de separar áreas en proporciones dadas aparecen también en el *Libellus de quinque corporibus regularibus* (Librito sobre los cinco cuerpos regulares), aunque algunos de ellos aparecen ligeramente más elaborados. Los cuerpos a los que se refiere Piero son poliedros, es decir, figuras tridimensionales cuyas caras son polígonos regulares y se acomodan de igual manera alrededor de cada vértice del sólido particular al que dan lugar. Se conocen 13 poliedros con tales características y fueron descritos por Papo a fines del siglo IV d. C., quien atribuyó su descubrimiento a Arquímedes (c. 287-212 a. C.). Por esta razón se les conoce como *poliedros arquimedianos* (Field, *The Invention of Infinity*, pp. 76-79).

La descripción que presenta Piero de estos cuerpos supera a la de Papo, quien sólo menciona el número y el tipo de caras de cada sólido. Piero va más allá y se refiere a las figuras de manera tal que permite su visualización, y además agrega ilustraciones que muestran al sólido dentro de una esfera, si bien tales dibujos poseen cierta ambigüedad respecto de lo que el autor está realmente mostrando. Lo que esto significa es que hay un contraste entre las instrucciones del texto para construir el sólido, y que hacen referencia a la forma que adopta en el espacio tridimensional —"cortar las esquinas del cubo", por ejemplo—, y la ilustración bidimensional que proporciona, misma que alude al trazo en perspectiva, sin que corresponda propiamente a ello. Pareciera ser que Della Francesca espera que sus lectores sepan interpretar ciertas convenciones, lo cual nos lleva a pensar

que para él la *perspectiva artificial* no sería la mejor manera de transmitir este tipo de información. Cabe señalar que este estilo difiere del de Leonardo en ocasión de los dibujos de los sólidos regulares que éste preparó para ilustrar *De divina proportione* (1509) de Luca Pacioli. Tales diferencias, según un estudio del tema, podrían ser el resultado del tipo de educación que recibieron y de sus distintos temperamentos: Leonardo hacía que todo lo que salía de su pincel pareciera real y particular, como si lo ilustrado representara un modelo concreto, en tanto que los dibujos de Piero se abocaban más a mostrar la forma matemática en abstracto (Pacioli, *La divina proporción*).

La introducción al *Libellus* señala que dicha obra fue compuesta como complemento del tratado sobre perspectiva y, por consiguiente, no sorprende que ambas obras fueran colocadas pasta con pasta en la biblioteca de quien contrató a Della Francesca en Urbino. Siendo coherente, Piero desarrolla las ideas en forma semejante a como lo hace en los tratados mencionados previamente, utilizando el toscano y no el latín, aunque paradójicamente sí recurre a dicha lengua al darle por título *De prospectiva pingendi*. Esto apuntaría a que aun siendo un manual para ser utilizado en los talleres por quienes deseaban aprender a dibujar en perspectiva, con el título de cualquier manera Piero pretende llamar la atención de quienes preferían ocuparse de textos de carácter más teórico o erudito, mismos que por lo general eran escritos en latín y estaban dirigidos a quienes habían pasado por las universidades.

De prospectiva pingendi y la geometría del espacio pictórico

En un sentido muy evidente, *De prospectiva pingendi* difiere de los otros dos tratados en cuanto a que la mayoría los problemas que componen el libro no aparecen planteados en términos numéricos. La explicación de ello es muy sencilla: los problemas propuestos se refieren a dibujos y caen por ende en el dominio de lo geométrico más que en el de lo numérico. Como un elemento más para apoyar lo dicho en el párrafo anterior, cabe citar el inicio del primer libro, donde Piero manifiesta su deseo de colocar su trabajo en el contexto de la tradición humanista, entendiendo este trabajo como una extensión legítima de la óptica o *perspectiva*, —que era el otro nombre con el que a fines de la Edad Media se conocía a las ciencias de la visión—, claramente enmarcada en los estudios universitarios:



Cabeza en perspectiva, tomada de Francesca, Piero della, *De prospectiva pingendi*, 1984.

La pintura consta de tres partes principales, que son dibujo [*disegno*], proporción [*commensuratio*] y coloración [*colore*] ... De ellas pretendo ocuparme únicamente de la proporción, a la que llamamos perspectiva, mezclando en ello algunas partes relativas al dibujo, ya que sin ellas la perspectiva no puede ser mostrada en acción ... nos ocuparemos de aquella parte que se puede mostrar mediante líneas, ángulos y proporciones cuando se habla de puntos, líneas, superficies y cuerpos.

Tradicionalmente, la óptica se ocupaba de estas cuestiones recurriendo a las matemáticas —de ahí el hecho de calificarla de *ciencia mixta*—, de donde resultaba que la perspectiva estudiada por Della Francesca debía también sujetarse a los cánones de la tradición erudita en la que se desenvolvía la óptica y que se remontaba al tratado que sobre el tema escribiera Euclides. Siguiendo una estructura ya clásica, *De prospectiva pingendi* se inicia con el estudio de figuras planas; la primera es el cuadrado, mismo que es subdividido para luego dibujar en su interior varios polígonos regulares. Estos patrones semejan, en varios casos, los mosaicos que Piero incluye en los pisos de algunas de sus pinturas. En el Libro II varias de las figuras planas estudia-

das en el Libro I pasan a ser proyecciones de objetos tridimensionales tales como una columna acanalada que es modelada como un prisma poligonal, una casa que es idealizada como un cubo o la estructura superior de un pozo. El Libro III presenta figuras más complicadas donde se consideran detalles como capiteles y bases de columnas o cabezas humanas observadas desde varias direcciones. En esencia, su método consiste en elegir una serie de puntos que definen la figura del objeto y luego encontrar la imagen en perspectiva de dichos puntos, mismos que al ser unidos mediante líneas recrean la figura, sólo que como aparecería ante los ojos de un observador colocado en cierta dirección.

Cada uno de los problemas se inicia señalando lo que se requiere realizar. Sigue una exposición muy detallada de cómo trazar el diagrama, primero la figura original y luego su aspecto bajo una cierta perspectiva. En la mayoría de los casos la demostración de la proposición o solución del problema consiste precisamente en la construcción de la figura. Por no venir acompañados de ninguna explicación matemática—igual que como sucedía en el *Trattato*, donde las manipulaciones algebraicas no eran explicadas—, se podría decir que lo único que el *De prospectiva pingendi* está diciendo al lector es qué pasos dar para copiar una figura bajo cierta perspectiva. Lo que resulta de ello es un texto excesivamente repetitivo cuya lectura llega a fastidiar. Como ocurre con muchos hombres de talento, Piero aparentemente carecía de sensibilidad respecto de lo que otros mortales podían tolerar.

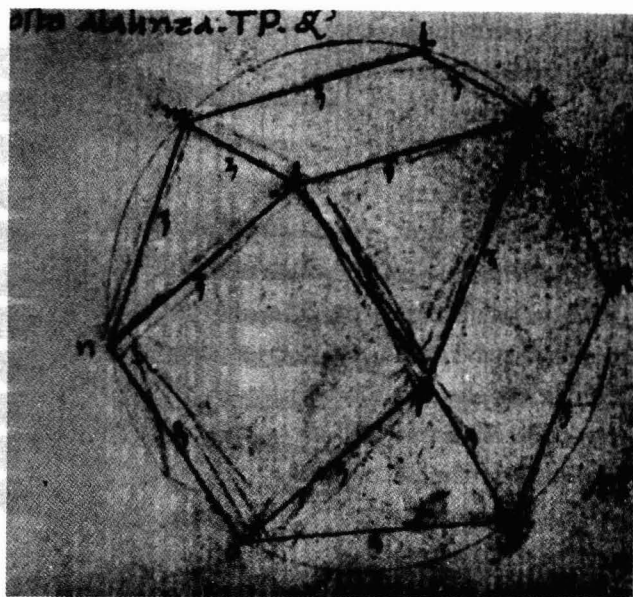
Dada la naturaleza del tratado y posiblemente porque en ciertas cuestiones buscó hacer más digerible y provechosa su lectura, Piero pretendía que cada copia del libro incluyese una ilustración que acompañara a la proposición correspondiente. Desafortunadamente no fue así, pues el dibujante no siempre completó la labor del copista y gran parte de los manuscritos que circularon no contenían la serie completa de ilustraciones. Pero si nos atenemos a aquellos que conservan las ilustraciones que se presume son semejantes a las que Piero presentó se encuentra que muchas de ellas corresponden a figuras que aparecen en sus pinturas. Es el arte del matemático al servicio del arte pic-

tórico. Si nos basamos en las fechas de realización más aceptadas de las pinturas y la escritura del *De prospectiva pingendi*, es muy probable que las figuras en cuestión sean bocetos preliminares que posteriormente fueron utilizados en sus pinturas. Esto se puede percibir al comparar algunas de las cabezas presentadas desde diversas perspectivas con las cabezas de personajes incluidas en *La historia de la verdadera cruz*, que aún se puede contemplar en la Pinacoteca de Sansepolcro.

El valor que Della Francesca otorgaba a la aplicación de las matemáticas en la pintura se puede apreciar en el Libro III, donde destaca la importancia de obtener la perspectiva correcta —refiriéndose a ella como una *vera scientia*— en una obra de arte. Las discusiones y los puntos que toca, en particular los referentes a las bases ópticas de la visión —el cono de luz, los rayos luminosos, la pirámide de visión, todos ellos elementos esenciales en cualquier teoría óptica propuesta hasta entonces— muestran su preocupación por alcanzar el conocimiento y, en este caso, su convicción de que el desarrollo de una ciencia matemática le permitiría obtener una representación correcta del cono de visión y, por consiguiente, del mundo visible.

Lo anterior queda de manifiesto en el teorema donde presenta la demostración matemática de que su método de construcción en perspectiva es efectivamente correcto. En concreto, en el Libro I, sección 13, presenta el método de construcción para “Trazar un cuadrado en perspectiva”. El diagrama que acompaña al enunciado permite establecer que su método es semejante al que con cierta ambigüedad había presentado León Battista Alberti en su libro *De la pintura* (1435). Las siguientes dos secciones se ocupan de demostrar que este método se puede aplicar para realizar un *pavimento* o piso compuesto de mosaicos cuadrados. Con ello, por primera vez en la historia, quedaba asentada la validez de los principios de la perspectiva artificial para construir imágenes que, distorsionadas, mostraban lo que ciertamente observaba quien contemplara la escena desde cierta posición (Field, *Practical Mathematician*, pp. 339-348).

En función de sus méritos matemáticos y originalidad, podría pensarse que *De prospectiva pingendi* se convirtió en un *best-seller* entre los aspirantes a artistas y no pocos matemáticos. Sin embargo, no corrió con esta fortuna: el texto en sí pasó a una oscuridad relativa en las décadas inmediatas a su aparición. Con todo, sus ideas ejercieron un profundo impacto en los textos sobre perspectiva del siglo XVI, todo gracias a que constituyen los fundamentos de dos de los más



Cubo-octaedro del *Trattato d'abaco*, tomada de J. V. Field, *The Invention of Infinity*, 1997.

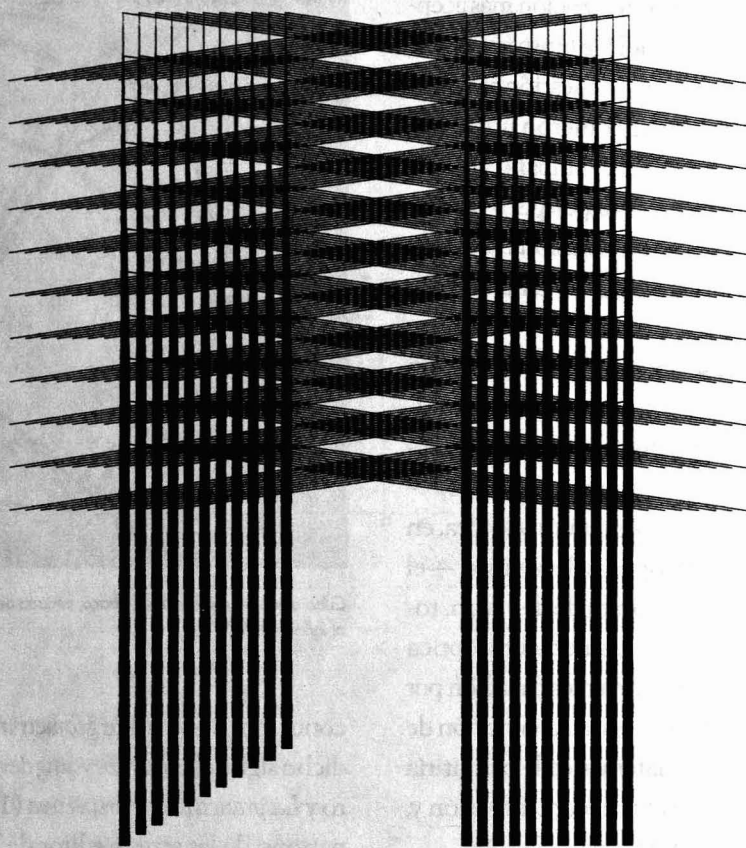
conocidos libros sobre *geometría visual* que aparecieron en dicho siglo: el *Underweysung der Messung* (1525) de Durero y *La pratica della prospettiva* (1568) de Daniele Barbaro, patrono de las artes y editor de Vitruvio. Esto sin olvidar la conexión que se puede establecer entre Della Francesca y Durero por la vía de Leonardo y Luca Pacioli, a quien aparentemente Durero visitó en Bologna en 1506 para “aprender los secretos de la perspectiva” (Kemp, *The Early Fortuna*, pp. 202-208).

El análisis de las pinturas de Piero revela su dominio del oficio de pintor. Su maestría en el uso del color, el debido manejo de los rayos de luz que iluminan o sombrean los espacios pictóricos y su atención por el detalle se coludían con la regla matemática que servía de brida y guía —como diría Leonardo— para la composición del espacio y la proporción de las figuras. Su habilidad como matemático, se dice, es la responsable de ese efecto de quietud o inmovilidad que transmiten sus personajes y que resulta tan característico de sus pinturas. Las situaciones en sus cuadros parecieran referirse a un preciso momento en el que ninguna línea en la pintura sugiere que un instante después habrá un cambio de dirección de alguna de sus partes. Esto sólo es posible lograrlo mediante un conocimiento profundo de los elementos matemáticos que participan en la composición. Y en esto Piero desborda su oficio de matemático.

Contemplar *La flagelación de Cristo* nos lleva, irremediablemente, a pensar en que su autor poseía una extraña capacidad para captar la disposición de los espacios y en-

tender la distribución de las figuras en la pintura. Esta capacidad se basaba en el uso magistral de la ley de la perspectiva. Nunca antes el espacio creado por un pintor se había expresado de manera tan rotunda. Por ello muchos consideran que esta obra es la cumbre del ilusionismo tridimensional del Renacimiento. La construcción matemática del espacio es tan marcada que los estudiosos del tema coinciden en que es el resultado de un ejercicio conducente a demostrar la posibilidad de pintar una escena en la que todos los elementos que intervinieran en ella se sujetarían estrictamente a las reglas impuestas por la perspectiva.

El trasfondo matemático fue puesto en evidencia en 1953, cuando Wittkower y Carter demostraron que *La flagelación de Cristo* exhibía tal cantidad de información coherente e inequívoca que era posible reconstruir el escenario arquitectónico que cobijaba a los dos conjuntos de personajes. Por primera vez se mostraron las posiciones exactas de las figuras en relación con los edificios y los espacios abiertos, así como la geometría un tanto complicada a la que se ajustaba el pavimento. El efecto global reviste una gran precisión y efectivamente recrea el espacio real (Wittkower, *Flagellation*, pp. 292-302). Sin embargo, si se es estricto, no todo lo que se muestra está correctamente representado. La banda blanca que desde la parte inferior del cuadro se extiende hasta la base de las columnas, y que separa las dos acciones, es más angosta de lo que dicta la geometría. La razón de ello es muy sencilla: Piero, como lo hiciera en otras obras, ha de haber considerado que esta manera de proceder mejoraba el resultado. Es decir, Piero reconocía la diferencia entre un teorema y una pintura. Dicha actitud no debe sorprender. Forma parte también de la lógica que rige la presentación



del libro *De prospectiva pingendi* donde, haciendo aproximaciones y despreciando ciertas magnitudes, “demuestra” en dos ocasiones afirmaciones que matemáticamente son incorrectas pero que pictóricamente producen en el observador el efecto requerido (Field, *Edge Distortion*, pp. 66-99). Esto, lejos de poner en duda el talento matemático de Piero della Francesca, reafirma su convicción de que en esta ocasión la verdad estaba al servicio de la belleza.

Piero y la fortuna de la tradición práctica

Lo que distingue el arte del siglo xv del producido por las generaciones precedentes no es lo que Burckhardt consideró un despertar del artista hacia los hechos del mundo, sino el sometimiento de los datos observacionales a un orden racional definible en términos matemáticos. Uno de los logros del Renacimiento fue sentar las bases para una nueva comunicación de lo visual que eventualmente contribuyó al desarrollo de nuevas formas de entender y explicar el mundo.

Fue el *virtuoso*, el hombre con *virtù* —que actuando racionalmente (como lo había hecho el Creador) había alcanzado a controlar cualquier situación—, el que se convirtió en el modelo, de acuerdo con el humanismo renacentista, de quien trabajaba para rendir homenaje a Dios a través de sus obras. El pintor, “al representar con la mano lo que había concebido con la mente”, prefiguraba al científico que mediante un análisis conceptual, y en ocasiones matemático, procedía a despojar a la naturaleza de sus secretos. No puede uno evitar pensar que Piero della Francesca fue uno de esos talentos con *virtù*. A través de sus lecturas sobre las leyendas de los santos, y con las matemáticas aprendidas en la escuela de ábaco y sus imaginativas exploraciones en

el terreno de la geometría griega, Piero construyó una obra, tanto artística como matemática, que lo hace depositario de la fama a la que según León Battista Alberti se debía aspirar.

La tradición práctica en la que se inscribe Piero, y que gracias a gente como él se heredó con los afanes prácticos de quienes recibían una educación universitaria, desembocó en el siglo XVI en el establecimiento y desarrollo del álgebra como disciplina independiente de la aritmética. Poco después el álgebra y la geometría tuvieron un fructífero encuentro en la *Géométrie* (1637) de Descartes que, décadas más tarde, serviría como uno de los puntos de partida de Newton para llegar a lo que sería su cálculo infinitesimal. La misma tradición práctica, ahora en su vertiente geométrica, atrajo la atención de matemáticos del calibre de Federico Commandino (1509-1575) y G. Battista Benedetti (1530-1590), autores de trabajos que resultaron el embrión de una nueva geometría, hoy conocida como geometría proyectiva, y que tuvo su presentación en el llamado *pro-yecto Brouillon* (1639) de Girard Desargues.

Esta historia, ciertamente, nos lleva a reconsiderar el supuesto divorcio entre las ciencias y las artes. ♦

Obras de Piero della Francesca

Trattato d'abaco del codice Ashburnhamiano 280 della Biblioteca Medicea Laurenziana, a cura di. G. Arrighi, Pisa, 1970.

L'opera "De corporibus regularibus" di Pietro Francheschi detto della Francesca, usurpata da Fra' Luca Pacioli, G. Mancini (ed.), en *Atti della R. Accademia dei Lincei, Memorie della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche*, s. 5, XIV, fasc. 8B, [1915] 1916, pp. 441-580.

De prospectiva pingendi, G. Nicco Fasola (ed.), Casa Editrice Le Lettere, Firenze, 1984.

Bibliografía

Ackerman, J., "The Involvement of Artists in Renaissance Science", en J. W. Shirley y F. D. Hoeniger (eds.), *Science and the Arts in the Renaissance*, Folger Books, Washington, 1985, pp. 94-129.

Alberti, León Battista, *De la pintura*, intr. de J. V. Field, trad. y estudio introductorio de J. R. Martínez, Facultad de Ciencias-UNAM (Col. Mathema), México, 1996.

Aronberg Lavin, M., *Piero della Francesca: The Flagellation*, The University of Chicago Press, Chicago, 1990.

Barbaro, D., *La practica della prospettiva*, Biblioteca di Architettura Urbanistica. Teoria e Storia, vol. 8, Arnaldo Forni Editore, Bologna, 1980.

Cennini, Cennino, *Il Libro dell'arte* (*The Craftsmen's Handbook*), Dover, Nueva York, 1954.

Dürer, A., *Underweysung der Messung*, Nuremberg, 1525.

Field, J. V., "Piero della Francesca's Treatment of Edge Distortion", en *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, vol. 1986, 1986, pp. 66-99.

—, "Piero della Francesca as Practical Mathematician: The Painter as Teacher", en *Atti del Convegno Internazionale di Studi*, a cura di M. dalai Emiliani e V. Curzi, Marsilio, Arezzo e Sansepolcro, 1996.

—, *The Invention of Infinity. Mathematics and Art in the Renaissance*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

Ghiberti, L., *I commentarii*, Ottavio Morisani (ed.), Nápoles, 1947.

Grendler, P. F., *Schooling in Renaissance Italy. Literacy and Learning, 1300-1600*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore/London, 1989, pp. 306-322.

Guisti, E., *Luca Pacioli e la matematica del Rinascimento*, E. Guisti, C. Maccagni (eds.), Giunti, Firenze, 1994, pp. 15-18.

Guston, P., "Piero della Francesca: The Impossibility of Painting", en *Art News*, vol. 64, 1965, pp. 38-39.

Jardine, L., *Worldly Goods. A New History of the Renaissance*, Doubleday, Nueva York, 1996.

Kemp, M., "Piero and the Idiots: The Early Fortune of his Theories of Perspective", en M. Aronberg Lavin (ed.), *Piero della Francesca and His Legacy*, University Press of New England (Studies in the History of Art, núm. 48, National Gallery), Washington, 1995, 199-211.

Lindberg, D. C., *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler*, The University of Chicago Press, Chicago, 1976.

Pacioli, Luca, *La divina proporción*, intr. de A. M. González, trad. de J. Calatrava, Ediciones Akal, Madrid, 1991.

Pecham, J., *John Pecham and the Science of Optics. Perspectiva communis*, D. C. Linsberg (ed.), The University of Wisconsin Press, Madison, 1970.

Vasari, G., *Le vite dei più eccellenti pittori, scultori e architettori*, M. Marini (ed.), vol. II, Grandi Tascabili Economici, Milano, 1933, pp. 376-380.

Venturi, A., *Storia dell'arte italiana*, vol. VII, Milano, 1911.

Vinci, Leonardo da, *Tratado de la pintura*, Editora Nacional, Madrid, 1982.

Wittkower, R. y B. Carter, "The Perspective of Piero de Francesca's 'Flagellation'", en *Journal of the Warburg and Courtauld Institutions*, vol. 16, 1953, pp. 292-302.

Caleidoscopios y simetría

JAVIER BRACHO

El discreto placer de mirar por el ojo de una cerradura, de ver sin estar, de ser testigo clandestino del acontecer en un mundo ajeno; la intimidad serena que infunde el acto de cerrar un ojo al acercar el otro a un hoyito de luz (telescopio, microscopio, cámara fotográfica, cerradura, rendija al baño del sexo opuesto...) para hacerse dueño de una imagen efímera, única e irrepetible, son sensaciones que condimentan el rito de asomarse a un caleidoscopio. El platillo es la simetría. La imagen depende del artefacto —puede ser un cilindro finísimo de madera tallada o de latón o bien de vil cartón forrado con orito y tener al otro extremo del ocular un redondel movable con cuentitas translúcidas, aceites viscosos, filamentos brillantes, arañitas o pequeños vitrales giratorios—, pero el principio es el mismo. El movimiento distrae y urde el hechizo —al girar otro poco este tubo mágico, cae un rombito azul y brincan al unísono por todos lados y en todas direcciones chispas azules que se integran a esos centros de confluencia que veíamos como “las flores rojas”; impacta el silencio con el que se produce esta catástrofe infinita que termina en un patrón totalmente inesperado (ya no son flores, ni rojas), asombrosamente diferente (el rombito no es tal), pero igualmente bello— porque la simetría no cambia, sólo cambió su instancia.

Aunque sepamos cómo funciona este aparato alucinógeno —es decir, que dentro del cilindro hay tres espejos formando un prisma triangular equilátero, que por el otro extremo del ocular entra la luz, traspasa las cuentitas llevándose el color y que luego rebota y rebota en los espejos hasta llegar al observador— no deja de ser fascinante la ilusión de un plano que se extiende virtualmente al infinito,

perdiendo su luminosidad en la distancia, con dibujos de coherencia obsesiva, intachable y repetitiva, como fascinantes son la geometría que lo sustenta y las matemáticas que en sus inmediaciones se han generado. ¿Por qué son básicamente el mismo todos los caleidoscopios que conocemos? Saltará el lector ducho que haya visto otro, pero el común de los mortales sólo ha visto ése, el clásico (y si por ahí hay alguien que no haya podido hacerlo ¡que se lo enseñen! o ¡que caiga la culpa sobre la conciencia social de nuestra civilización!). Sí, tienen razón los duchos. Sí hay otros diseños de caleidoscopios, no tan comunes, no tantos, y algunos sorprendentemente nuevos. Lástima que no podamos recurrir, como descaradamente lo hicimos arriba, a la experiencia vivida del lector para su descripción. Habrá que irse con tiento desde el elemento básico.

Un espejo

Ese ente asombroso que llamamos espejo —destíñase al asombro con su ineludible cotidianidad contemporánea; recupérese en la piel del aborigen ante la conciencia de enfrentar su imagen— es un pedazo de plano en el que rebota la luz como si fuera una pelota lanzada, sin efecto, contra el piso o la pared (“ángulo de incidencia igual a ángulo de reflexión”, reza el estribillo). El efecto que produce es el de abrir una ventana a un mundo virtual sobrepuesto al real. La ventana no puede traspasarse, tras ella se vislumbra un trozo idéntico del mundo real, pero invertido, se desdobra el “aquí” en un “allá” sólo asequible por la vista, y los habitantes de ese mundo virtual ven exactamente lo mismo que sus

contrapartes reales asomándose a la ventana (y lo ven invertido también: tampoco saben leer nuestros letreros).

Llamamos *reflexión* a la abstracción matemática del efecto de un espejo, completándola y corrigiendo sus pequeños defectos, por supuesto. Se piensa en el espejo como todo un plano (no solamente un trozo) y el efecto se produce sobre todo el espacio invirtiendo sus dos mitades, intercambiándolas, es decir, es una manera de “mandar” al espacio en sí mismo. Sólo el espejo, un plano completo, permanece inmóvil y funciona como espejo en ambas direcciones.

Hablaremos también de reflexiones en otras dimensiones. En un plano —piénsese en una mica, en la cual está dibujada una imagen, sobre un papel— el espejo de una reflexión es una línea recta —dibújese exactamente igual tanto en la mica como en el papel— y su efecto es intercambiar las dos mitades en que se divide el plano manteniendo la rigidez —levántese la mica, voltee y colóquese en su lugar de tal manera que la línea de la mica coincida punto a punto con la del papel; la imagen de la mica es el reflejo del original—. Dicho de otra manera, una reflexión en un plano es el efecto de girarlo 180° , un ángulo π , alrededor de una recta que es su espejo. Una reflexión en una recta es el efecto de girarla 180° alrededor de un punto, que es el espejo de la reflexión. Vale la pena observar que en esta idea cinética de una reflexión echamos mano implícita de que el plano y la recta viven en una dimensión extra —para hacer lo mismo con el espacio tendríamos que “girar” en una cuarta dimensión (que se puede)—, y conlleva el peligro de creer que reflejar es ese movimiento. Pues no es así, es el efecto; el resultado final, sin tiempo de por medio.

Vale también la pena introducir notación.¹ Si llamamos r a una reflexión, en el plano, digamos, para fijar ideas, y x es algo que vive en él, puede ser un punto o una figura, $r(x)$ —léase r de x — es la imagen de x bajo la reflexión. Por ejemplo, si b es el dibujo de una letra b en la mica y el espejo es vertical, $r(b)$ sería una letra d , o p si el espejo es horizontal. Sea A el dibujo de una letra A con su tipo más simple, y r alguna reflexión en su plano. Nótese que $r(A)$ siempre será una letra A , aunque inclinada o invertida, y si tomamos como espejo de la reflexión a la línea vertical que pasa por su ápice se tendrá explícitamente que $r(A) = A$. Esto es lo que llamaremos una *simetría*. Manchas de tinta en un pa-

pel que luego se dobla generan figuras con simetría de reflexión en la línea del doblar. Un cuerpo humano ideal, H digamos, tiene como simetría a la reflexión r en el plano que lo parte en mitades izquierda y derecha, $r(H) = H$.

Dos espejos (la peluquería)

No sé mucho de las estéticas de hoy en día, pero en mis tiempos una peluquería era tal por sus espejos (y por sus revistas, por supuesto). Subirse finalmente (no había prisa, esperar era parte exquisita del rito) a ese sillón majestuoso para ser elevado, a golpe de pedal y lentamente, era entrar —en ese estado de ser un simple objeto con pelos, resignado a la contemplación silenciosa— en el hechizo de dos espejos paralelos. El chango inmediato, el de enfrente, es el de siempre, el yo del baño, pero el siguiente es cautivante —o en ese entonces lo era, el de hoy ya es un pelón irredento—, y además, más y más, alternados cara y coco, hacia delante y hacia atrás, la palabra infinito ineludible. Vayamos al “siguiente”. Digamos que y soy yo, que r_1 es la reflexión en el espejo de enfrente y r_2 la reflexión en el de atrás. Es claro que $r_1(y)$ es el yo cotidiano del espejo, nada especial, y a $r_2(y)$ no lo estoy viendo (regla número 1: no mover la cabeza, orejas de por medio); pero a $r_1(r_2(y))$ sí lo estoy viendo: ése es el “siguiente”, el espejo me permite ver lo que hay detrás pero viéndolo enfrente: soy yo trasladado dos peluquerías más adelante. Aplicar esas dos reflexiones es una traslación, el efecto que tiene en la peluquería, P , es mandarla para atrás invertida, $r_2(P)$, y luego r_1 la manda para adelante, a $r_1(r_2(P))$, que queda en seguida de su reflexión inmediata $r_1(P)$ y ya no está invertida (el efecto de invertir dos veces es no-invertir).

Puntualicemos dos cosas. Primero, las reflexiones son ejemplos de algo más general que llamaremos *transformaciones rígidas* (porque preservan distancias), que son, como ya dijimos, maneras de mandar al espacio en sí mismo, o reglas para hacerlo. Otro ejemplo, que ya se nos apareció, además de las reflexiones, son las traslaciones: mover todo una distancia fija. Y segundo, estas transformaciones se pueden *componer*, es decir, aplicar una después de la otra para obtener una nueva. Si f y g son transformaciones (letras nuevas que pueden tomar el valor de cualquiera de las anteriores o de las que vienen), su *composición* es la transformación: “aplíquese g y luego f ” o bien “ g seguida de f ”. La denotamos por $f \circ g$ para tener la regla $f \circ g(x) = f(g(x))$ al aplicarse a objetos concretos, aunque nos obligue a leer en

¹ Notas para el amable lector al que le choque la notación matemática: no se aferre a su ritmo; las letras pierden su sentido fonético (y por lo tanto rompen el ritmo de la lectura) para adquirir otros significados. Déles su tiempo, que es el de las ideas.

dirección contraria.² Obsérvese que aquí el orden de los factores sí altera el producto: $r_2(r_1(y))$ está dos peluquerías más atrás, no lo veo y él sí me ve a mí, es distinto del “siguiente” $r_1(r_2(y))$; por tanto $r_1 \circ r_2 \neq r_2 \circ r_1$.

Ya que hablamos de transformaciones y su composición, hablemos de una que de tan obvia no es fácil ver: el movimiento no-movimiento, todo se queda en su lugar. Se le conoce como la *identidad*, la denotaremos 1 y está definida por la regla $1(x) = x$. Se cumple también que $1 \circ f = f \circ 1 = f$. Y otra cosa, para las reflexiones se tiene que $r \circ r = 1$, es decir, reflejar y volver a reflejar (en el mismo espejo) es como no hacer nada.

Antes de dejar la peluquería y entrar al clóset, notemos a manera de resumen que dos espejos paralelos generan por composición de sus reflexiones, r_1 y r_2 , una infinidad de transformaciones; muchas de ellas son traslaciones (cuando se componen un número par) y otras reflexiones (por ejemplo, $r_1 \circ r_2 \circ r_1$ es la reflexión en el espejo de atrás de la peluquería que está justo enfrente de mí, $r_1(P)$, a la que me comunica la ventana que puedo tocar, el espejo de r_1). A un conjunto de transformaciones como éste lo llamamos un *grupo*, pues la composición de dos de ellas también está ahí. El nombre técnico con que se conoce al grupo generado por dos espejos paralelos es el de *grupo diédrico infinito*, D_∞ , y es el representante abstracto de la simetría del mundo virtual que produce la peluquería. Otro ejemplo: consideremos la figura $|b|$; si tomamos las reflexiones en las dos líneas que indican las verticales, se genera una figura plana infinita: $\dots |d|b|d|b|d|b|d|b| \dots$. Tiene simetría diédrica infinita (pedazos de este tipo de simetría se pueden ver en muchísimos frisos de pirámides). Nótese que bastó para definirla una figura base, la b , y dos reflexiones que generan la simetría. Y nótese también que esencialmente es de dimensión uno. Puede vivir en una recta. Ahí, recuérdese, una reflexión es voltear en un punto, y cualquier par de reflexiones generan D_∞ . Por ejemplo de $\longrightarrow$, reflejando en los puntos se obtiene $\dots \longrightarrow \cdot < \cdot \longrightarrow \cdot < \cdot \longrightarrow \dots$.

Dos espejos (el baño)

Entremos ahora a un clóset fino, de casa *pirrurris*. No todos tuvimos esa experiencia, pero es fácil recrearla. Un pequeño pasillo con ropa y cajones a ambos lados, oloroso a lim-

pio y a perfumes y a zapatos, un espejo al fondo y otro en la puerta, que podemos cerrar a nuestras espaldas. Así, con la puerta cerrada, la simetría es equivalente a la de la peluquería. Pero al empezar a abrir la puerta algo cambia. La sensación de infinito se rompe para convertirse en un simple “muchos”, los clósets ya no están dispuestos en línea recta sino que se van ladeando y dan la impresión de un enorme pasillo circular hecho de pequeños clósets conectados por sus ventanas-espejos. No alcanzamos a ver todo pues las ventanas que comunican los clósets sólo permiten husmear hasta cierta distancia que se achica conforme se abre la puerta y el pasillo se curva. Recordemos. Cada espejo es una ventana en un plano ideal. En el momento en que estos planos no son paralelos, deben de intersectarse en una recta paralela a las bisagras de la puerta pero mucho más allá del mundito real, el clóset, en que estamos confinados. Este eje viaja en el plano del espejo del fondo, desde el infinito, siendo siempre el centro del pasillo circular hasta llegar al clóset, cuando la puerta ya está totalmente abierta y no vemos nada más que un simple clóset cuyos espejos han dejado de interactuar. Mejor vamos al baño.

¿Por qué ya no hacen esos juguetes no-juguetes espejos-botiquín? ¿Será cuestión de clase? ¿Tendrán los niños de hoy esa experiencia de jugar a verse moviendo las orejas de esos espejos triples? Si no: ¡qué caiga sobre la conciencia de los arquitectos! En fin, situémonos en uno de esos viejos baños ante un espejo fijo (el del botiquín), con reflexión r_1 , en cuyo extremo hay una bisagra y otro espejo, la oreja, con reflexión r_2 , (quizá haya que treparse al lavabo para recrear la experiencia). La bisagra es la intersección de los planos de reflexión, el *eje*. Totalmente abierta la oreja, se tiene que $r_1 = r_2$ y los espejos son ventanas al mismo mundo $r_1(B)$, donde B es el baño.

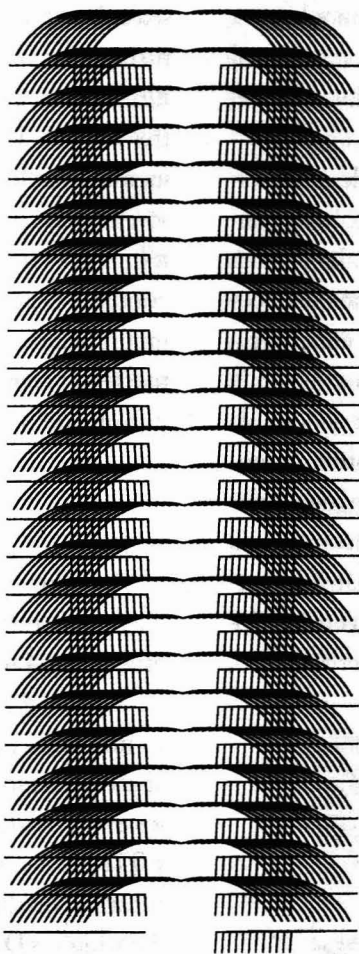
Puesta la oreja en ángulo recto $-\pi/2$, habrá que ir machacando—, vemos a $r_1(y)$ (y sigo siendo yo), a $r_2(y)$ y además hay otro yo, y’ digamos, justo atrás de la bisagra. ¿Es $r_1(r_2(y))$ o será $r_2(r_1(y))$? Lo que es claro es que no es el simple yo del espejo, porque si cierro un ojo, él cierra el otro—y otra cosa chistosa, no le veo el ojo abierto a y’, siempre queda justo detrás de la bisagra, se alinea con el eje—. No es un yo invertido, es el yo que ven todos menos yo; le puedo leer el letrero de su camiseta. Si veo por un lado de la bisagra, estaré viendo a $r_1(r_2(y))$ y si miro por el otro, veo a $r_2(r_1(y))$. La coherencia de las respuestas de y’ y el baño virtual que lo circunda obligan a concluir que $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$. De hecho, y’ se obtiene de y girándolo en el eje de la bisagra 180° , un ángulo π . Alrededor del eje hay cuatro baños, dos

² Ya ve: no sólo cambia el ritmo sino a veces hasta la dirección (pasitos para atrás), aunque f.g puede leerse “fbolita g”. Prometo que no se complicará más.

invertidos y dos no. Este tipo de simetría se ve con frecuencia en las esquinas de zapaterías y cafeterías, ampliándolas.

La imagen depende del ángulo de los espejos. Si los abrimos un poco más allá del recto se juntan los ojos de y' , desaparece su nariz y hasta podemos crear una mariposa con alas mis orejas, y desvanecerla; aunque en cada momento la imagen depende de dónde esté yo viendo, la bisagra separa dos posibles mundos visibles. Si, por el contrario, cerramos más acá del ángulo recto, aparece un ser de tres o cuatro ojos y dos narices hasta biseccionarse en dos nuevos yos, uno será $r_1(r_2(y))$ y el otro $r_2(r_1(y))$. Si vamos cerrando: de la bisagra salen dos nuevos espejos, una mariposa ala-de-oreja, hasta llegar al surgimiento de un nuevo yo perfecto detrás de la viagra, perdón, de la bisagra. En este punto, es fácil descubrir que el ángulo de los espejos es $\pi/3$. Pues alrededor del eje se ven seis rebanadas de baño, con yos en medio y husmeando, alternadamente invertidas y no invertidas (recuérdese que el pastel completo mide 2π , que entre 6 da $\pi/3$). A un lado de y está $r_2(y)$ (separado por la oreja-espejo-ventana) y le sigue $r_2(r_1(y))$. Es y girado en el eje un ángulo $2\pi/3$ (es decir, 120°), pues está dos rebanadas más allá en el pastel de seis y no está invertido. A él le sigue justo el de enfrente, $r_2(r_1(r_2(y)))$, que podríamos describir análogamente yendo hacia el otro lado, y viendo por el otro lado de la bisagra, como $r_1(r_2(r_1(y)))$. Se cumple entonces que $r_2 \circ r_1 \circ r_2 = r_1 \circ r_2 \circ r_1$, y ésta es una reflexión en un espejo virtual formado por r_2 del espejo-botiquín unido por la bisagra a r_1 del espejo-oreja, donde veo al más reciente yo. Por último, antes de salir del baño, observemos que al seguir cerrando el ángulo de los espejos van apareciendo más y más imágenes, pero que sólo en ciertos ángulos estas imágenes forman un todo coherente (en el ángulo π/n hay $2n$ gajos alternadamente invertidos y no invertidos).

Resumamos ya, generalizando un poco nuestras observaciones. Si r_1 y r_2 son reflexiones cuyos espejos se intersectan con un ángulo θ , entonces $r_1 \circ r_2$ es una rotación centrada en la intersección con ángulo 2θ . Cuando su ángulo es de la forma π/n , generan un grupo finito, llamado grupo diédrico



drico de orden n , D_n , que tiene n reflexiones y n rotaciones (incluyendo a la identidad como rotación de cero grados). Y cualquier cosa que se le ponga al gajo genera un dibujo, o imagen, con simetría diédrica. Ejemplos clásicos son los rosetones góticos, el papel picado a la china y algunas joyitas arquitectónicas.

Es interesante mencionar que Leonardo da Vinci sabía ya que esta simetría diédrica, junto con la rotacional asociada —tómense sólo a las n rotaciones—, es la única que pueden tener las figuras planas (por figura entiéndase la dibujada en un papel), claro, para cualquier n . Una simetría rotacional aparece en las galaxias espirales, las letras N o Z y la inefable suástica. A este fenómeno se le conoce ahora como el teorema de Leonardo.

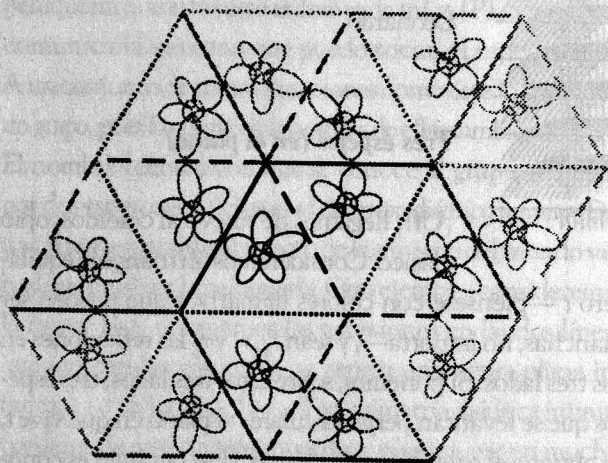
Tres espejos (en el plano)

¡Uf!, llegamos de nuevo al caleidoscopio clásico. Consideremos un triángulo equilátero

t —piénsese con colores llamativos que pueden ser manchas, no importa—, y sean r_1, r_2 y r_3 las reflexiones en sus tres lados. Si ponemos, sobre estos tres lados, tres espejos que se levantan perpendiculares al plano en que vive t , se obtiene el caleidoscopio clásico. (Ése también es conocido como caleidoscopio de Brewster, pues un tal Brewster lo descubrió y patentó en la Escocia de 1815 y hoy día su manufactura representa toda una industria artesanal con una asociación, la Brewster Society, que realiza pomposos congresos anuales). Pero ya no necesitamos su parafernalia, podemos abstraernos del plano, del triángulo y de sus reflexiones asociadas para entender qué pasa.

Consideremos un vértice del triángulo t . Por él pasan los espejos (las líneas) de dos reflexiones; éstas generan grupos diédricos de orden 3 (se ven 6 triángulitos) pues el triángulo equilátero tiene ángulos $\pi/3$. Pero al componer con la tercera reflexión, o con cualquier palabra en las "letras" r_1, r_2 y r_3 , el triángulo puede viajar e irse muy lejos. Y de hecho lo hace. Podemos llegar a cualquier punto del plano a partir de t , a golpe de aplicarle r 's. La regla es la siguiente: digamos que queremos ir a un punto x . Pintemos de colores los lados de t : rojo, amarillo y azul corres-

pondiendo a r_1 , r_2 y r_3 , respectivamente. Vayamos hacia x desde t . Si nos conviene salir por el lado rojo, pasamos al triángulo $r_1(t)$ que también tiene sus lados coloreados y el rojo coincide con el de t . Si de aquí nos acercamos a x saliendo por el lado azul, brincamos a $r_1 \circ r_3(t)$; si de aquí decidimos salir por el amarillo, vamos a $r_1 \circ r_3 \circ r_2(t)$, etcétera. Hasta que llegamos a un triángulo que cubre a x . La palabra que construimos en las r 's depende del camino que escogimos, pero la transformación final *no*, por la coherencia local de los grupitos diédricos (bueno, a menos que a x le caiga una arista o un vértice de t y haya una poquita de ambigüedad). Eso es lo que hace perfectamente coherente a la imagen: un plano enmosaicado de triángulos equiláteros, imágenes de t , la mitad inversiones y la otra mitad *no*, como tablero de ajedrez; los lados de los triángulos formando tres haces paralelos que se encuentran en ángulos $\pi/3$, y formada cada una de estas rectas con intervalos rojo,



amarillo, azul, rojo, amarillo, azul... Las transformaciones del plano que dejan invariante a esta imagen son su grupo de simetrías. Son todas las posibles composiciones de r_1 , r_2 y r_3 ; el grupo es llamado *triangular de tipo 3,3,3*, $T[3,3,3]$, y contiene a todas las reflexiones en las rectas de los tres haces, a los diédricos en los vértices, a muchas translaciones y, por supuesto, a la identidad: representada por t .

Y, ahora sí, vayamos a la pregunta ¿hay otros *caleidoscopios*?, entendiendo a éstos como arreglos de espejos que generan una imagen coherente. Ya vimos a la familia que se forma con dos espejos y simetría diédrica. ¿Y con tres espejos en el plano, qué?

Supongamos que hay más. Que tres reflexiones generen una imagen coherente. Sus tres espejos, que son líneas en el plano, forman un triángulo t . En cada vértice de él debe generarse un grupo diédrico (para que, al menos ahí,

sea coherente). Esto implica (por nuestra sesión en el baño) que los espejos se encuentran en ángulos de la forma π/n . Podemos diferenciarlos, bautizarlos, y decir que los tres ángulos de t son π/p , π/q y π/r , donde p , q y r son números naturales (1, 2, 3, 4..., no los de las rifas).³ Y además, son mayores que 1, pues los triángulos no tienen ángulos π (que es el ángulo no-ángulo). Pero sabemos desde la secundaria (y por los griegos) que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , es decir, π . Así que nuestros numeritos deben cumplir $\pi/p + \pi/q + \pi/r = \pi$. Factorizando a π , y anulándolo se obtiene

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$$

La solución que ya conocemos es 3,3,3. Y es fácil ver que, ordenando a p , q y r en forma creciente, solamente hay otras dos: 2,4,4 y 2,3,6. Pues si p es muy grande, $1/p$ es muy chiquita, y si además q y r son tan grandes como p pues ya no damos para el uno. Los dos triángulos nuevos que aparecieron son los del clásico juego de escuadras. Espejos en sus aristas generan los grupos triangulares $T[2,4,4]$ y $T[2,3,6]$, y nuevos caleidoscopios que mostrarán rosetones con diferentes simetrías correspondiendo a sus diedriquitos D_2 y D_4 , o bien D_2 , D_3 y D_6 ; este último es el que da los rosetones más *chonchos* y corresponde al ángulo picudo de la escuadra-60. Y, como ya demostramos, no hay más.

Aunque vale la pena señalar, pero dejar al lector ducho que verifique, que dentro del grupo $T[2,3,6]$ se encuentra como subgrupo al $T[3,3,3]$; y que dentro del $T[2,4,4]$ se encuentran los de los mosaicos de la cocina, y que hay algunas cocinas —mosaico de triángulitos blanco y azul— con su simetría.

Tres espejos (en el espacio)

Acabamos de ver cómo diseñar tres tipos de caleidoscopios de “carne y hueso” a partir de sus triángulos básicos (el equilátero y las escuadras). Pero machaquemos con la receta: se cortan tres espejos (de esos de vidrio) rectangulares con la misma altura y cuyas bases tengan la misma longitud que uno de los lados del triángulo en cuestión; se colocan perpendiculares a un plano y se les envuelve

³ Perdón, ahora estoy usando a r como número; pero prometo nunca más volver a usarla como reflexión.

con *masking tape* para formar un “cilindro triangular” rígido cuyo interior es reflejante; ponga objetos translúcidos en un extremo con mucha luz y deléitese. Obsérvese ahora que estas ternas de espejos viven en ternas de planos muy especiales. Tres planos generales se intersectan en un punto, véase una esquina; pero estos que tenemos son, como terna, “algo así como paralelos”, nunca se intersectan los tres. De ahí que sus ángulos sumen π pues tienen un plano perpendicular común. Pero tres planos que sí se intersectan tienen ángulos que suman más que π : para convencerse voltee a una esquina piso-pared-pared o techo-pared-pared, los tres ángulos son rectos, $\pi/2$, y suman $3\pi/2 > \pi$, es decir (en grados), 90 más 90 más 90 son 270 y más que 180.

Por lo tanto, podemos construir nuevos caleidoscopios cuyos espejos abstractos se intersecten en un punto si encontramos tres planos-espejos con ángulos π/p , π/q y π/r para que den coherencia local (en sus intersecciones, recuerde la bisagra) pero con p , q y r cumpliendo ahora que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

Las soluciones de esta desigualdad, suponiendo sin perder generalidad que $p \leq q \leq r$, son: 2,2, n (para cualquier n); 2,3,3; 2,3,4 y 2,3,5. (Observe que las ternas cercanas, pero mayores, en ese orden —2,3,6; 2,4,4 y 3,3,3— ya las conocemos, y que para todas las demás ternas la suma es menor que 1.) De nuevo, a los grupos que generan reflexiones con estas características se les llama *triangulares* y se les denota $T[p, q, r]$.

Los grupos $T[2,2,n]$ se pueden ver en el baño. Se coloca el espejo-oreja en un ángulo π/n con el espejo-botiquín, y en la esquina de abajo (más fácil que en la de arriba) se pone un nuevo espejo paralelo al piso y perpendicular (ángulos $\pi/2$) con los dos anteriores; es una esquina de espejos y el $T[2,2,2]$ es la esquina usual de un cuarto o zapatería.

Los grupos $T[2,3,3]$, $T[2,3,4]$ y $T[2,3,5]$ son los grupos de simetrías de los sólidos platónicos, conocidos y sobados desde la antigüedad. Los griegos, dícese que el mismísimo Platón, sabían de su importancia y unicidad, que tenían una simetría exacerbada y que con tanta simetría (quitando la esfera que no se mide y por lo tanto pasa a otras ligas) eran sólo cinco —el tetraedro, el cubo o hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro—, que reaparecen en Kepler como teoría cosmológica, en muchos otros puntos de la historia y luego aquí entre caleidoscopios. Pero no nos dejemos impresionar, insistamos en los caleidoscopios para de ahí reconstruir los afamados sólidos.

Tomemos en las manos a alguno de los tres caleidoscopios. Consta de tres espejos planos que se intersectan en un punto: el vértice o *centro*, llamémoslo. Es un cucurucho triangular con espejos hacia adentro; nos podemos asomar por su boca, o base: hagámoslo, pensando que es grande —mas no frágil o pesado, al fin que estamos soñando— para poder meter la cabezota. Lo que ya sabemos es que al voltear a las tres aristas, que llamaremos *rayos*, donde se juntan por pares los espejos, hay diédricos del orden que dictan los tres numeritos. ¿Y, más allá? ... despacio. Pegados a mi cucurucho, por su espejo correspondiente, hay tres cucuruchos iguales —invertidos, claro— que siguen compartiendo el vértice o centro. Y alrededor de ellos se ajustan más y más cucuruchos sin problemas de cupo alrededor de las aristas, que van asemejando rayos, encajando perfectos, y saliendo del centro. ¿Está claro?, naturalmente se van curvando. Van formando una esfera como estalagmitas ideales, o gajos de acitrón, y cada cucurucho con su cabecita adentro husmeando y sorprendida, papaloteando en diferentes direcciones pero con coordinación caleidoscópica.

Ahora, volteemos hacia el centro. La maravilla es que sí se cierra la esfera. Los cucuruchos se ajustan completándola con limpieza inaudita alrededor del centro, y justo detrás de él hay un yo viéndome. Pero aquí surge una sutil diferencia. En el caleidoscopio $T[2,3,3]$ aquel yo es un yo rotado —se le nota pues no me ve a los ojos, y al girar mi cucurucho lo hago girar a él, y nos cuesta trabajo el contacto visual—. Pero el de los otros dos sí asusta, justo detrás del centro está ese yo de cabeza mirándome fijo; si le cierro un ojo, los que quedan abiertos se alinean al instante con el centro en una liga indestructible por más que cabeceemos; y si giro mi cucurucho, él se queda ahí girando el suyo, como ayudándome a mover todo lo demás. Y esto sucede porque viene de la transformación “antípoda”, que es parte de estos grupos y ahí está: actuando.

Estos tres grupos son finitos y sus elementos corresponden a mis cabezas que veo; la identidad, por supuesto, a la que traigo puesta. En $T[2,3,3]$ hay 24; en $T[2,3,4]$ 48, y en $T[2,3,5]$ se ven 120 cabezas. Cualquier cosa que se introduzca al cucurucho generará imágenes de hermosa simetría. En particular, podemos armar los sólidos platónicos con un pedacito de papel o una varilla. Otra manera consiste en truncar el cucurucho cerca de su vértice. Esto nos impedirá ver al yo antípoda, pues aparece un “sólido” etéreo en el centro. En $T[2,3,3]$, truncando perpendicular a un rayo de ángulo $\pi/3$, aparece el tetraedro; en $T[2,3,4]$, truncando perpendicular al rayo $\pi/4$, surge el cubo, y al $\pi/3$ el octae-

dro, y en $T[2,3,5]$, por el de $\pi/5$ sale el dodecaedro y por el de $\pi/3$ se arma un icosaedro.⁴ Su asociación como duales reside en que tienen la misma simetría.

Cuatro espejos (su historia)

Esto fue la teoría. ¿Bonita, no? ¿Y a poco no se antoja armar uno de estos caleidoscopios —el de 120 cabezas de una vez— para verlo-verlo? Pero ahí te quiero ver. Hay que cortar vidrios en formas muy precisas y raras, para luego ajustarlos y pegarlos, y en fin, que no es lo mismo manejar planos e intersecciones como matemático que como vidriero. Pero la terquedad es la terquedad y en su momento tuve la posibilidad de hacerlo y conté con un excelente equipo creativo (de esos seres maravillosos que crean cosas de verdad) que apoya y motiva y hace y... pum: ahí están, en Universum, se les conoce como los Rolidoscopios. Pero ésta no es la historia que quiero contar.

Mientras se construían los Rolidoscopios —ahí en la sala de matemáticas en gestación, CU, 1992— un ceramista armaba otra maravilla, su Mosaico de Penrose (obra maestra no sólo del México actual sino del mundo). Se llama Juan Sandoval. Quizá por la cercanía en ese estado de estar haciendo, creando realidad, o por su encanto propio, mágico y luminoso, se contagió del gusanito de los espejos, y se obsesionó con la idea de que si estaban ahí esos caleidoscopios que nunca nadie (que conociéramos al menos) había visto, ¿por qué no habría de haber más? Yo, acá, muy ducho, muy matemático, salía con mi rollo de que sólo hay cinco sólidos platónicos y bla, bla, bla... y en el fondo todavía no entendía. Pero él veía mucho más allá. Intuyó como artista que debía haber más. Aprendió el oficio de vidriero, y empezó a jugar. Me llevaba modelitos maravillosos que veíamos absortos hasta hacer bizcos, acoplando los clásicos o añadiéndole nuevos elementos. Y empezamos naturalmente a colaborar: él, el motor creativo, visionario, rebelde y emprendedor; yo, el técnico, crítico, frío, calculador. Cada colaboración tiene su historia, su ritmo, sus papeles, su encanto o desencanto, sus momentos —parezco doctora corazón hablando de matrimonios—, y ésta se dio y dio. Tres rozagantes caleidoscopitos cuya gracia genialmente simple es... ¿a ver?, ¿adivinó?... tener cuatro espejos en ángulos racionales. Y sólo hay esos tres. Solicitamos la patente, y la ganamos en los Estados Unidos. En el proceso leímos

cientos de ellas; aprendí que desde Moëbius ya se había hablado de —no construido— los tres platónicos; que un israelita los patentó en 1972; que otro gran geómetra, pero de este siglo, Coxeter, había desarrollado la teoría de grupos de reflexiones y que Tits acabó de clasificarlos en todas las dimensiones. Y en fin, acabé obsesionándome como matemático en aspectos de esa área y produciendo en ella, y ahora entiendo algo. Por su parte, Juan Sandoval es el único artista en el mundo que puede producir unos ejemplares de exactitud pasmante, objetos de museo (los dos primeros viven en Universum), y sigue viviendo de su hermosa escultura cerámica.

De esta historia me quedan, además de experiencias y conocimiento, dos grandes satisfacciones y una angustia. Primero, el enorme placer de acercarme, sobar y asomarme a los caleidoscopios que de vez en vez produce Juan, objetos escultóricos de texturas cerámicas y presencia geométrica en apariencia irracional, que invitan a asomarse por sus ventanas triangulares. Hay que ser descarados y ver con los dos ojos abiertos hacia adentro para perderse en su profundidad, pues generan, abren, crean un espacio perfecto sobrepuesto al nuestro, paralelo quizás y coincidiendo con él sólo en el volumen que veíamos por fuera y que podemos volver a recorrer para observar aquel vacío infinito desde otra ventana y en otra dirección. Nuestro mundo les regala su luz por las ventanas y ellos la transforman en infinitos sólidos etéreos de simetría platónica y textura caleidoscópica, que flotan impávidos en posiciones obsesivamente precisas y sincronizadas; y en algunos de ellos vemos nuestra imagen observando: observándose. Lo que los de Brewster son a la segunda y las peluquerías a la primera, estos caleidoscopios son a la tercera dimensión. Segundo, la satisfacción de saber que si Occidente nos deslumbró con los espejos de vidrio hace quinientos años, hoy se los podríamos regresar de cuatro en cuatro y cortados en formas caprichosas pero puestos en su debido lugar. Y tercero, la angustia de que Juan y yo seamos incapaces de aprovechar en toda su magnitud esta oportunidad. ♦

Lecturas recomendadas

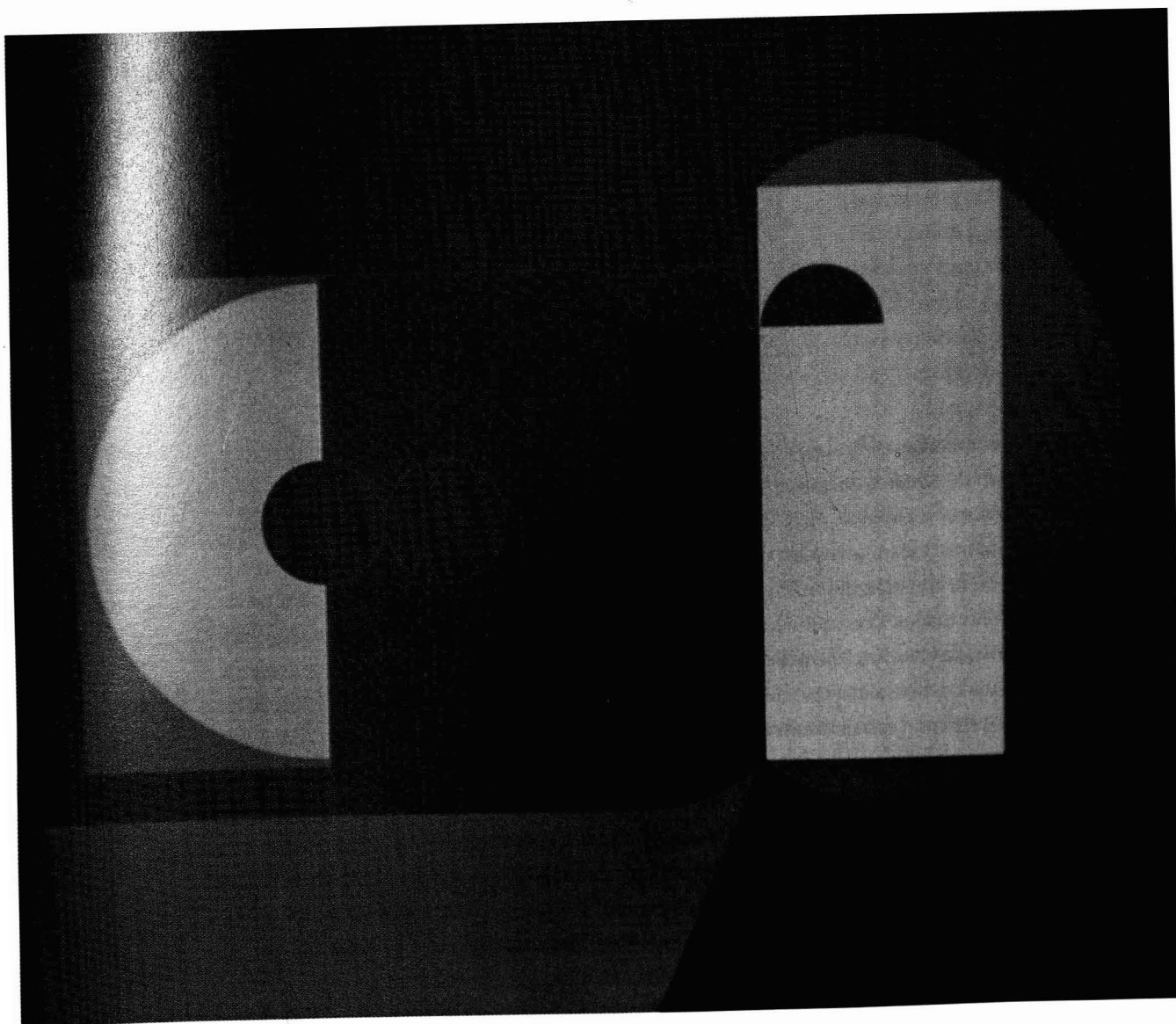
- Coxeter, H. S. M., *Regular Polytopes*, Dover, Nueva York, 1973 (1ª edición, 1942).
- Sherk, F. A., et al (eds.), *Kaleidoscopes; Selected Writings of H. S. M. Coxeter*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, Wiley, Nueva York, 1995.

⁴ Y ya lo dejo en paz, no intentaré explicarlo.

La computadora y la creación artística

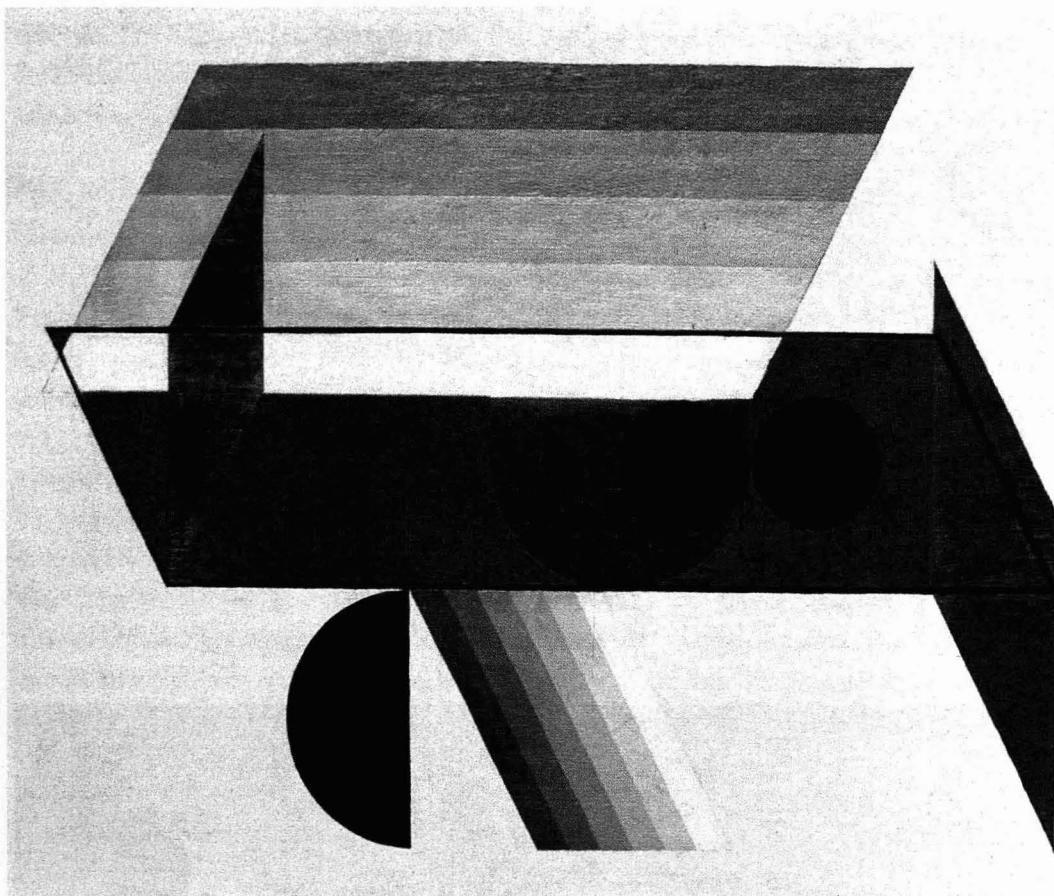


MANUEL FELGUÉREZ



Motivos transformados, 1973, laca/tela, 125 x 150 cm

De la serie
La máquina
estética,
1976,
óleo/tela,
40 x 50 cm



*Considero obsceno todo proyecto que proponga sustituir una función humana
que involucra respeto personal, entendimiento y amor
por un sistema de computación.*

Joseph Werzchbaum:
Computer Power and Human Reason

En 1969 ingresé como maestro en la UNAM. La materia que impartí fue diseño formal, la cual formaba parte del plan de estudios de la licenciatura en diseño industrial, inaugurada ese año en los sótanos de la entonces Escuela de Arquitectura de la Ciudad Universitaria.

Al año siguiente trasladé mi actividad docente a la Academia de San Carlos. Ahí lo primero que hice fue participar en la creación del nuevo plan de estudios que transformó las antiguas carreras de artes plásticas en artes visuales. Creo que a los miembros del Consejo Técnico se nos pasó la mano pues inventamos una serie de materias relacionadas con el cinetismo para las cuales nunca conseguimos a los maestros adecuados. Realmente no había en México artistas con conocimientos científicos, ni científicos que se interesaran suficientemente en las artes plásticas.

Por haber participado con gran entusiasmo en el proceso de creación de ese plan de estudios, me vi comprometido a hacer todo lo posible por sacarlo adelante, una vez que fue aprobado por el Consejo Universitario. Tuve que crear a partir de nada mi clase, que en esencia se trataba de lo que se llama composición o construcción u organización del espacio y de la teoría general sobre este tema con la pretensión de saber por qué un objeto es o no artístico. Hubo que rastrear todos los antecedentes teóricos y enseñar de acuerdo a una estricta lógica, descubrir el porqué de cada línea, de cada volumen, de cada color para poder demostrar al alumnado de una manera “irrebatible” si estaba bien o mal cada uno de los ejercicios que se realizaban. Para esto la única manera fue recurrir a la geometría, que podía hacer claros los aciertos y los errores.

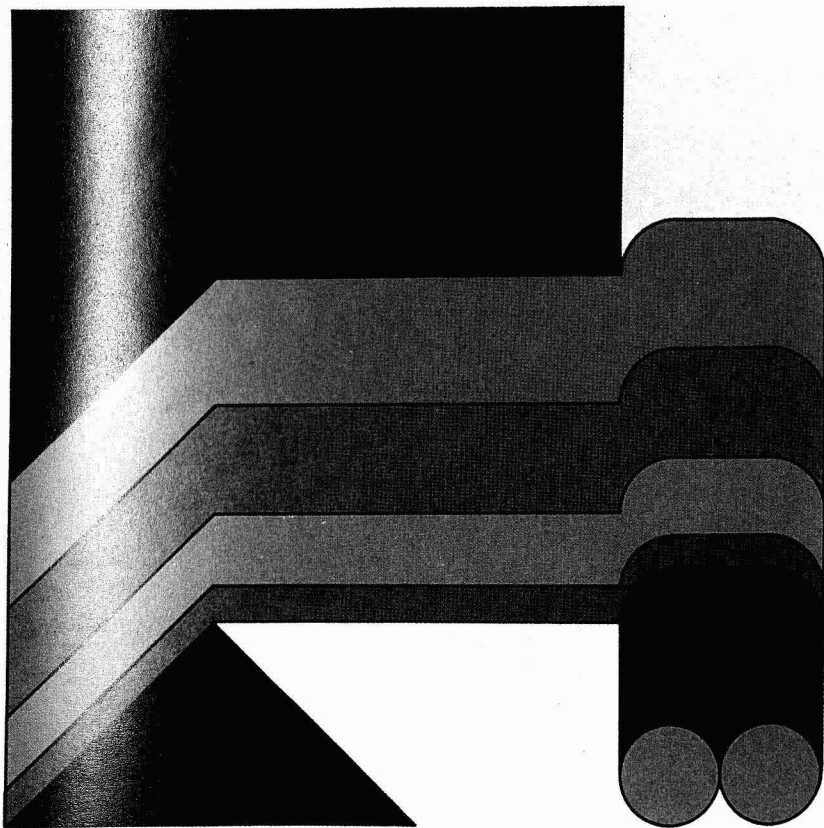
Impartí clases el primer año. Por la falta de maestros conocedores del tema, como ya lo dejé ver, tuve que seguir con el mismo grupo en el segundo y luego en el tercer año... tratando de manera experimental de concebir sobre la marcha los ejercicios y programas necesarios para cumplir en lo posible con el utópico plan.

Mi formación, entre los años de 1949 y 1956, había sido dentro de las estructuras formales del cubismo. Mi maestro Ossip Zadkine había guardado en sus clases total apego a principios como las proporciones, el juego entre planos, las concavidades, las convexidades, lo claro y lo oscuro, etcétera... Todo dentro del cuadro o el cubo. Sin embargo, en 1958 visité Nueva York y fue profunda la impresión que me causó tanto el expresionismo abstracto como el informalismo europeo que en ese tiempo

se podía ver en las principales galerías. Entonces poco a poco fui agregando a mis principios formales elementos del informalismo.

A finales de los años sesentas Kasuya Sakai, Vicente Rojo y yo tuvimos una reunión con el crítico Jorge Alberto Manrique, a partir de la cual nos propusimos iniciar en México un movimiento de arte geométrico. Esto me llevó a regresar por completo a un orden estrictamente formal, precisamente en 1969, cuando empecé a impartir clases en San Carlos, por lo que resultó natural que lo que yo enseñaba correspondiera a lo que estaba haciendo y teorizando. De esta etapa es la exposición *El espacio múltiple*, que primero se presentó en el Museo de Arte Moderno de México y después, en 1975, en la Bienal de Sao Paulo, donde obtuvo el Gran Premio.

A fines de 1972 el escenario estaba listo, dejé de dar clases y me dediqué de lleno a una nueva face-



De la serie
*La máquina
estética*,
1976,
óleo/tela,
40 x 50 cm

ta académica, producto de mis reflexiones en el sentido de que la geometría (como parte de las matemáticas) contaba ya en ese momento con la velocidad de operación de la computadora y que por tal motivo era factible usarla para el diseño artístico. Para realizar dicha tarea obtuve un contrato de investigación en la UNAM, en la Coordinación de Humanidades, dirigida en ese momento por el poeta Rubén Bonifaz Nuño.

El principio fue lento y sumamente difícil pues no tenía yo la menor idea de cómo operar la máquina ni cómo programarla. Conseguí una carta de la coordinación dirigida al Instituto de Matemáticas para que se me permitiera empezar a experimentar. En esa época las computadoras que poseía la Universidad eran IBM de primera generación. Se veían como grandes roperos negros y la comunicación con ellas se establecía a través de tarjetas perforadas. Había en toda la sala una sola pantalla. A mí me autorizaron usarla una hora cada semana. Algunas veces las máquinas estaban sobrecargadas y el programa no entraba. Alguien me ayudó a programar para dibujar las formas geométricas elementales. Los cuadra-

dos y triángulos salían bien pero los círculos se construían con base en pequeños segmentos de recta que uno iba acomodando para lograr algo que se pareciera a una circunferencia.

La idea original consistía en analizar los cuadros que yo había hecho a lo largo de mi carrera. Para esto reuní cerca de doscientas fotografías y sobre cada una de ellas coloqué un papel albanene, reduje cada mancha, cada espacio de color a una forma geométrica simple. De ahí salieron doscientos dibujos que repetí para que todos fueran del mismo tamaño. Como fruto de este primer paso descubrí que todas y cada una de mis obras podían reducirse a un alfabeto de pocas formas esenciales y que era posible saber el máximo y el mínimo de formas utilizadas en cada obra. Supuse en consecuencia que con un simple programa combinatorio y estadístico podía lograr nuevas ideas de cuadros.

Para comunicarme con la computadora tuve que reducir cada forma a números: los círculos a la medida de su diámetro, los cuadrados y triángulos a su altura y longitud. Con base en los números obtenidos perforé las tarjetas requeridas con la ayuda del arquitecto Óscar Olea. Posteriormente, gracias a que él tenía un amigo en el Instituto Mexicano del Seguro Social, logramos que el programa corriera en una computadora de la institución. Salieron cientos de nuevas combinaciones siempre dentro de mis parámetros. Pero este resultado estaba en unas grandes listas llenas sólo de números, así que al azar seleccioné cien y me puse la tarea de volver a traducir todo a geometría. Tardé muchísimo en hacer este trabajo, al grado de que me resultaba más fácil y rápido inventar un cuadro. Todo fue un gran fracaso. Yo le había entregado a la máquina formas organizadas, un orden y la máquina me respondía en desorden total. No me desanimé pues me di cuenta que a pesar de lo que había sucedido había ganado algo en experiencia y que por tal motivo debería comenzar una segunda etapa.

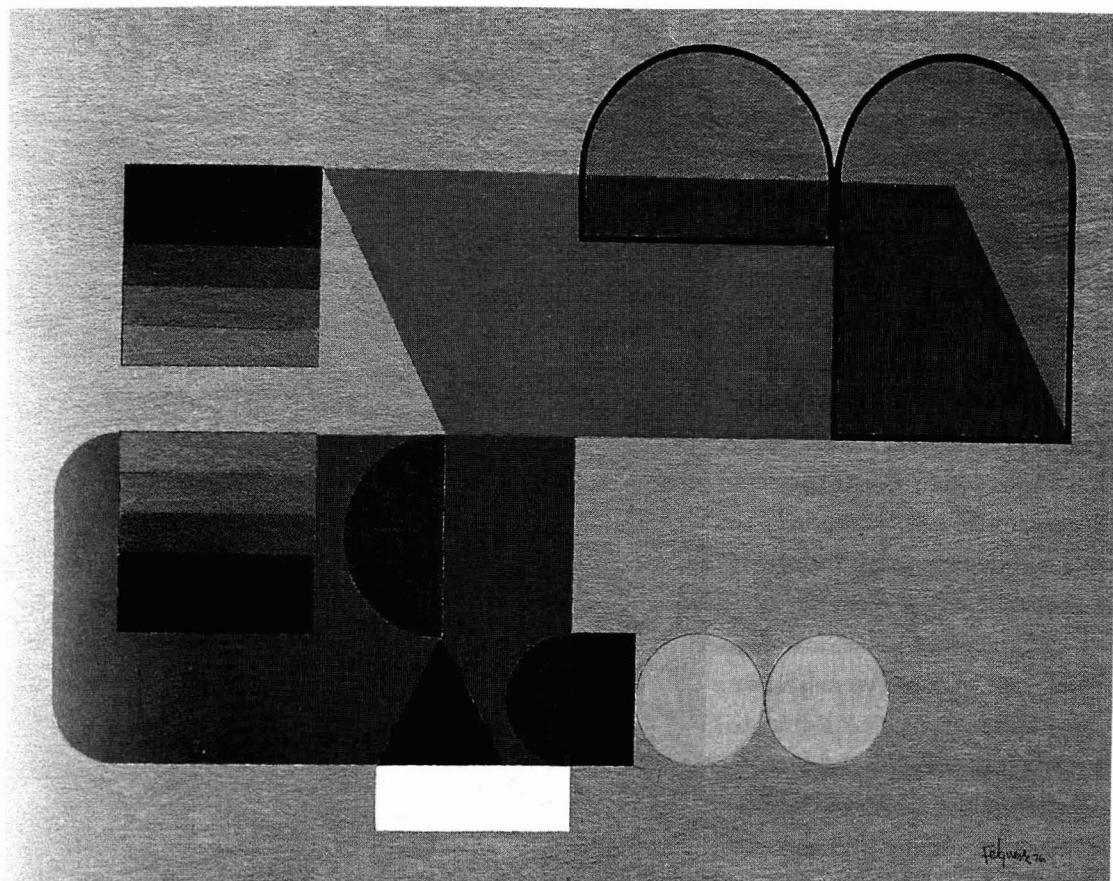
Otra vez recurrí a Óscar Olea, quien me aconsejó tratar de averiguar si un cuadro abstracto tiene de manera clara un "arriba" y un "abajo". Empecé esta tarea pero muy pronto la abandoné puesto que era más fácil voltear el cuadro. Entonces volvimos a discutir y planear el rumbo de la investigación.

Ahora reduje mis doscientos dibujos a sólo cincuenta, eligiendo los que más me gustaban y se diferenciaban entre sí. O sea los erigí en un modelo. Si el problema era de orden entonces había que presuponer que cada obra del modelo estaba en equilibrio. Esto, sin embargo, resultaba imposible ya que la organización de un cuadro así sólo se logra con simetría y el pintor normalmente desequilibra la forma para equilibrar posteriormente la composición con el color o la textura. Puesto que las cincuenta obras habían sido organizadas sólo por la intuición había que encontrar unos parámetros de mis desequilibrios. Se aplicó el principio de la balanza y la palanca: una forma no pesa si está al centro del cuadro y a medida que se aleja de este centro adquiere más peso relativo. El nuevo trabajo exigió dibujar sobre cartulinas del mismo espesor, recortar con un exacto cada una de las formas, encontrar

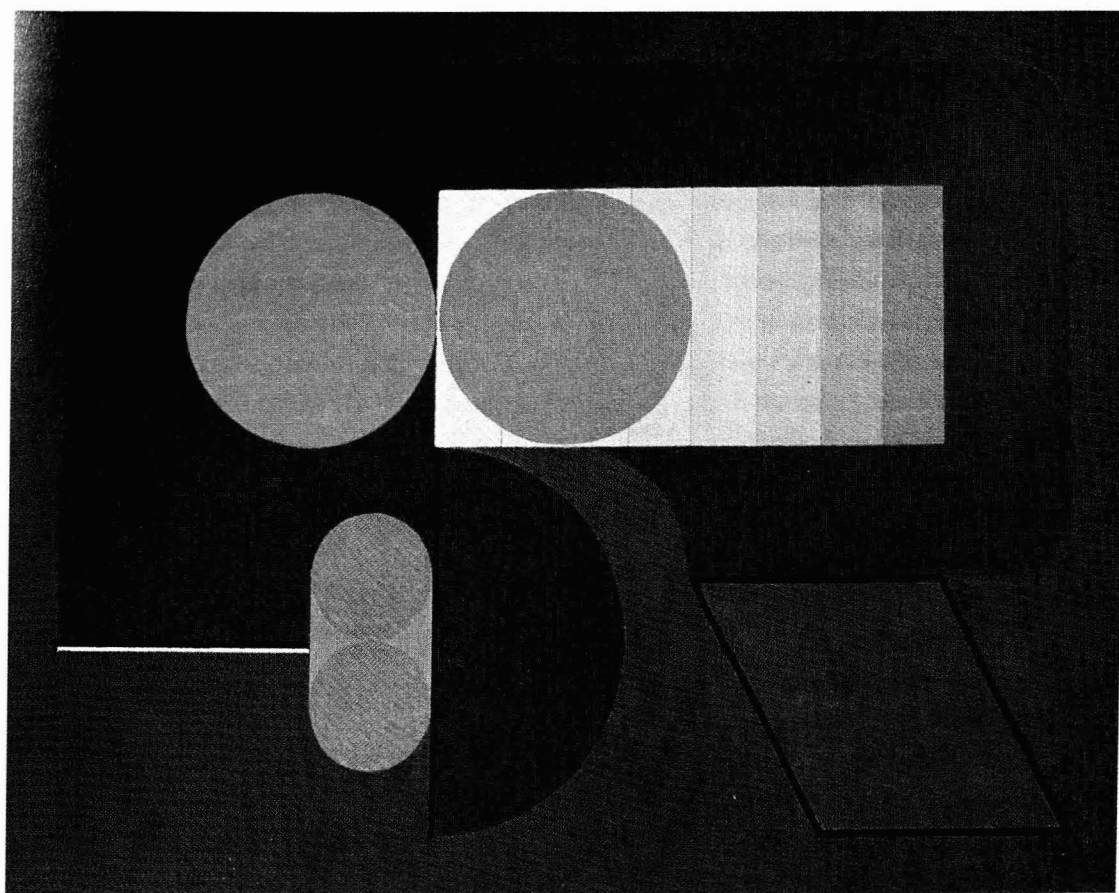


*Combinación
144,
1973,
metal
y poliéster
policromado,
100 x 100
x 20 cm*

De la serie
*La máquina
estética,*
1976,
óleo/tela,
40 x 50 cm



De la serie
*La máquina
estética,*
1976,
óleo/tela,
40 x 50 cm

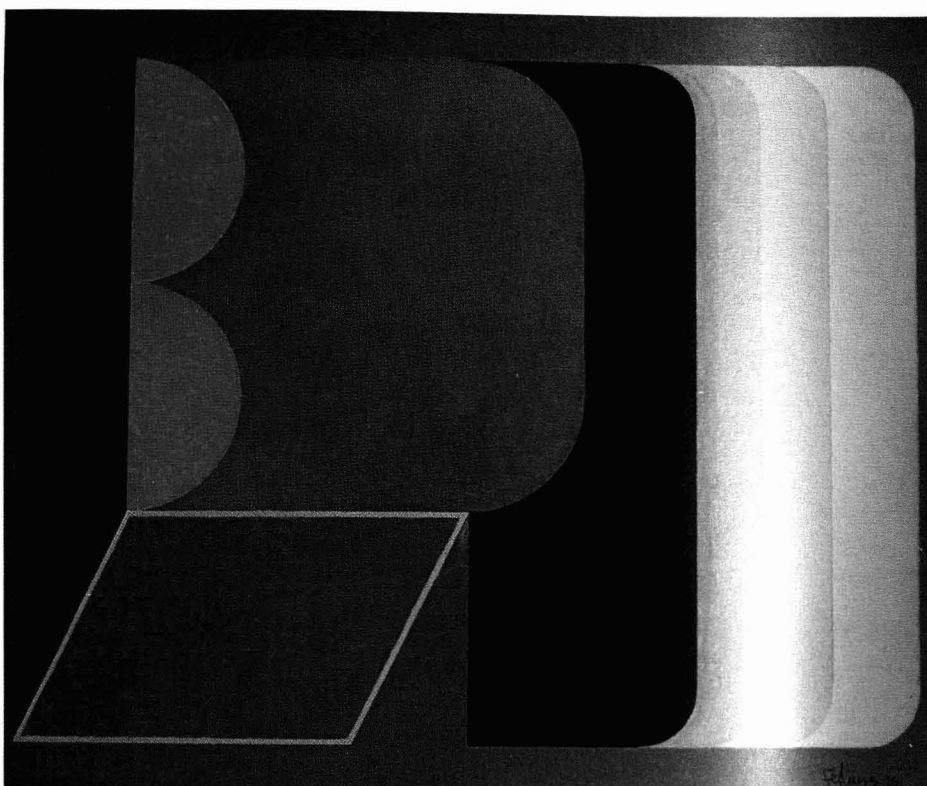


su centro, medir la distancia entre éste y el punto central del cuadro y finalmente pesar las formas en una balanza de precisión. Ya con estos datos se pudo crear un programa. Se averiguó que mis composiciones giraban siempre en dirección contraria a las manecillas del reloj, así como el máximo y mínimo de la velocidad de giro. Mediante la aplicación del primer programa estadístico combinatorio y la suma de estos nuevos encuentros, la máquina empezó a simular obras ordenadas, distintas y a su vez similares al modelo.

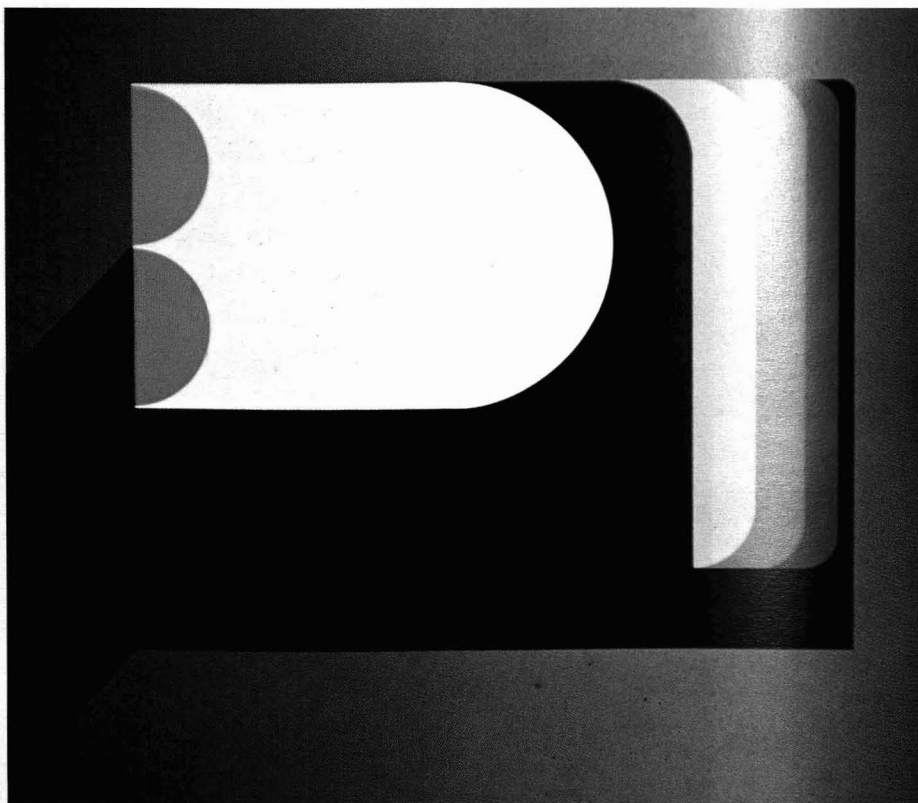
El proceso seguía siendo sumamente lento pues una vez más había que hacer la traducción de números a geometría. Por otro lado, no en todos los casos salían los diseños de acuerdo a lo esperado; había que eliminar muchos y aceptar sólo algunos. Sin embargo, el resultado fue satisfactorio; esta experiencia dio como resultado el libro *El espacio múltiple* (Manuel Felguérez, UNAM, 1979).

La tercera etapa de mi investigación se inició a raíz de que obtuve la beca Guggenheim. Ésta me fue concedida de acuerdo con mi solicitud, por lo que viví un año en Boston pues, según lo que había averiguado, en la región donde se encuentra esta ciudad estaba más desarrollada la tecnología que me sería necesaria. Originalmente propuse como sede de mis investigaciones el Instituto Tecnológico de Massachusetts y la Universidad de Harvard. Ya en la ciudad me decidí por Harvard debido a que en ese tiempo se encontraba ahí Octavio Paz impartiendo un curso de literatura comparada. Fue él quien me presentó al personal del Carpenter Center for the Visual Arts, institución a la que fui asignado como investigador visitante. Esto sucedió en septiembre de 1975.

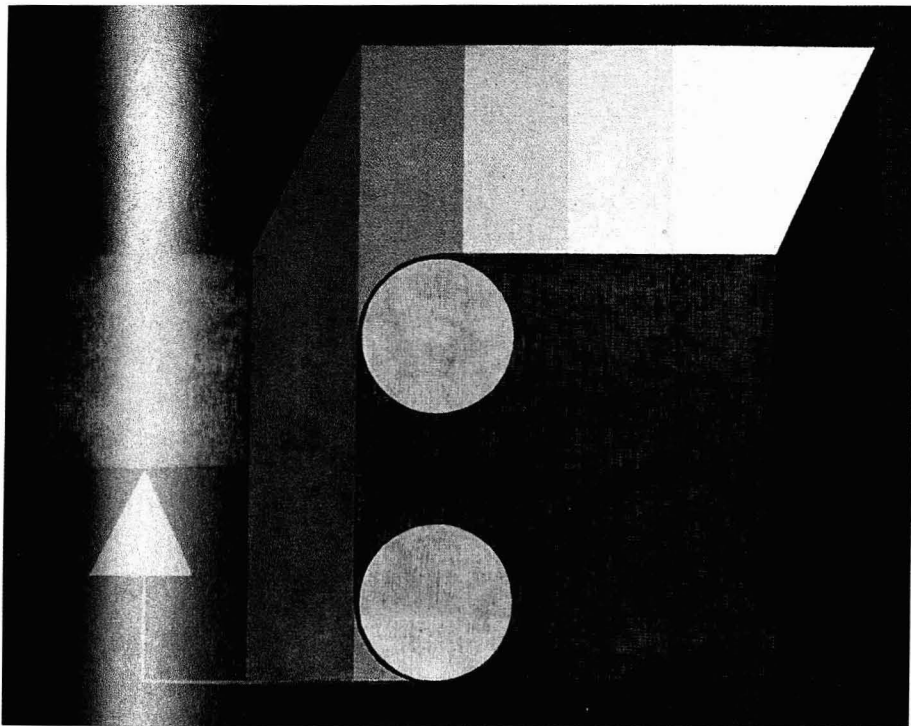
Si en la UNAM como ya dije tenía derecho a usar la pantalla sólo una hora a la semana, en Harvard aconteció de manera distinta; mi primera sorpresa fue contar desde el primer día con un cubículo personal en el que había una computadora



De la serie *La máquina estética*, 1976, óleo/tela, 40 x 50 cm



con una gran pantalla y una serie de aparatos adicionales desconocidos por mí hasta entonces; además, podía usar la máquina las veinticuatro horas del día. Empecé el trabajo. Desde un principio me fue proporcionado un programa graficador de obras. Tuve serias dificultades iniciales; entre ellas, las relativas al aprendizaje de la terminología para operar la computadora, además de que todo había que hacerlo en un inglés técnico que yo no dominaba. Sin embargo, al poco tiempo, sin mayores problemas, comencé a dibujar ideogramas hasta llegar otra vez a cincuenta para construir un nuevo modelo. Las formas geométricas elegidas para esta etapa fueron ocho: cuadrado, rectángulo, círculo, triángulo, semicírculo, círculo-rectángulo, rectángulo-rombo, rombo vertical y rombo horizontal.



De la serie
*La máquina
estética*,
1976,
óleo/tela,
40 x 50 cm

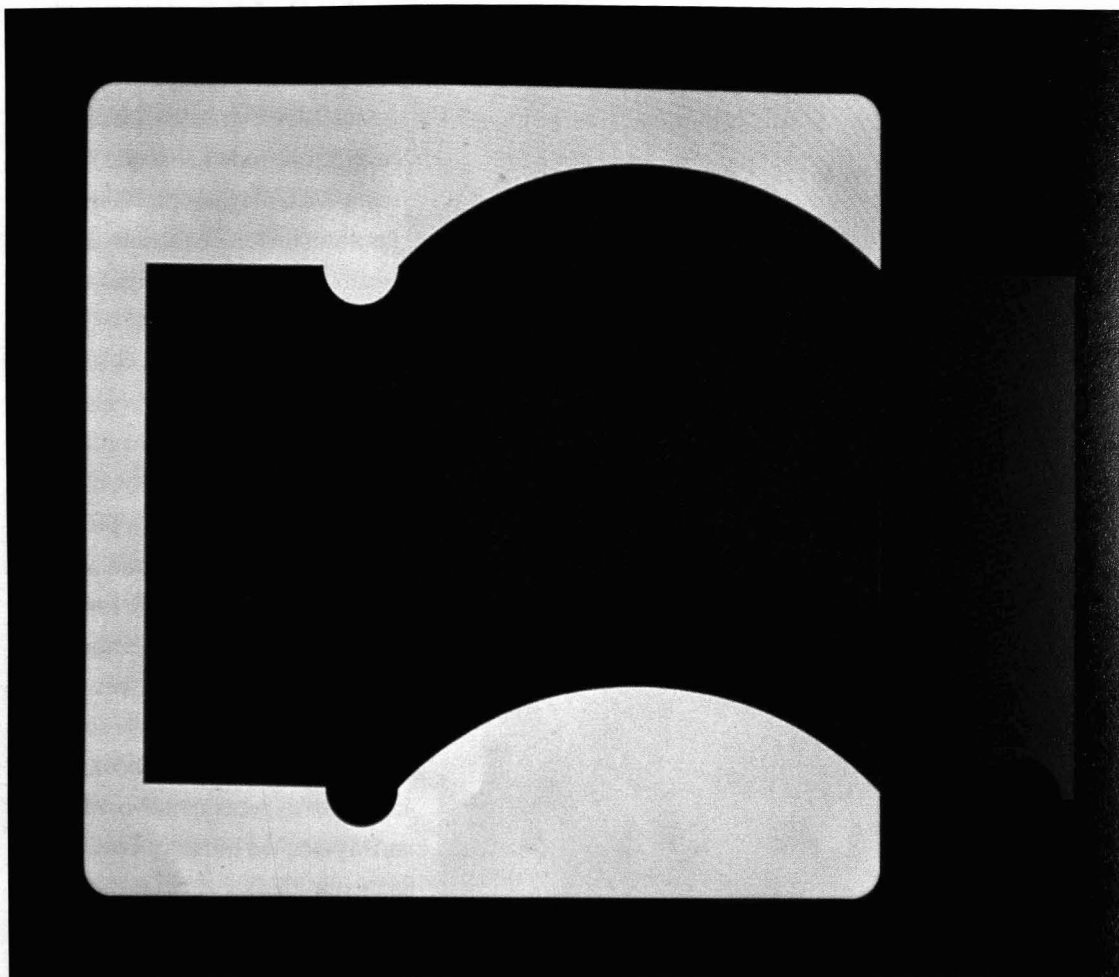
Pronto fui a Nueva York a ver exposiciones y visitar amigos, entre otros Fanny Sannin y Mayer Sasson, colombianos que habían vivido en México. Ella es una destacada pintora y él un ingeniero en sistemas, amante de las artes. Hablamos de lo que yo estaba haciendo. Mayer se mostró interesado y opinó que tal vez con la teoría de identificación de sistemas podría alcanzar el resultado que buscaba, esto es, generar nuevos ideogramas a partir del modelo. Yo no tenía la menor idea sobre esa posibilidad. Entonces me explicó que esta teoría inicialmente la habían aplicado los astrónomos para observar un cometa que se aproximaba a la tierra y, de acuerdo con su comportamiento durante pocos días, poder predecir su

trayectoria futura, así durara un millón de años, si nada la perturba. Por lo tanto, si mi modelo constituía una observación de mi comportamiento (intuitivo) ante la creación de pinturas durante veinticinco años, quizás podrían determinarse posibilidades de creación prácticamente infinitas. No dejé pasar la oportunidad y le propuse inmediatamente asociarnos en esta investigación.

De regreso a Harvard comencé a mandarle a Sasson mis dibujos realizados en computadora. Él los analizaba y procesaba para luego enviarme la respuesta. Meses después por fin quedó todo listo para que pudiera correrse el programa. Mayer trabajaba en una compañía llamada American Electric Power Service Corporation, que controlaba el sistema para la distribución de electricidad a gran parte de los Estados Unidos. Sus oficinas se encontraban en el número uno de Broadway. Mayer le platicó a sus jefes lo que estábamos haciendo y obtuvo la autorización para correr nuestro programa en sus instalaciones. Llegó el gran día de ver el resultado; nos citamos en su oficina y pasamos al laboratorio, a mí me acompañaba Meche, mi esposa.

Había un pasillo que en uno de sus lados estaba limitado sólo por grandes vidrios; atrás de ellos había un impresionante conjunto de computadoras y equipos complejíssimos. Los seis operadores que dirigían todo esto vestían uniforme azul cielo. Junto a la pared de vidrio había un *plotter* (trazador de gráficos), que constaba de un gran rollo de papel y brazos metálicos con plumas cargadas de tinta china. Nosotros nos paramos en el pasillo frente a una rendija especial para recibir los resultados, pues estaba estrictamente prohibido entrar en ese espacio similar a lo que se puede ver en una película de ciencia ficción. Se dio la orden y empezamos a ver que sobre el papel iban apareciendo con gran precisión uno

◀ *El estímulo B*,
1973,
laca/tela,
125 x 150 cm



*Armonía
modificada,
1973,
laca/tela,
125 x 150 cm*

a uno los cincuenta dibujos modelo y después nuevas opciones de ideogramas, siempre nuevos y sorprendentes pero estricta e inequívocamente míos. Cada nuevo dibujo tardaba en realizarse exactamente once segundos. La emoción fue indescriptible.

Regresé a Boston. A pesar del éxito obtenido, la investigación no paró ahí; como ya dije, en el caso del cometa, el resultado es válido siempre y cuando nada altere el comportamiento de su órbita; en el caso del ser humano, su ideología estética es perturbada constantemente, lo cual se hizo patente en que decidimos aplicar ahora un simple programa de optimización. Mayer me mandaba diez o más hojas con nueve ideogramas cada una, yo los observaba con todo cuidado durante largas horas, decidía según mi sensibilidad del día cuáles eran los que más me motivaban y los calificaba del uno al diez. Por su parte, Mayer ingresaba estos datos a la computadora y le pedía nuevos diseños.

Esta operación la realizamos muchas veces y como la máquina "aprende", los diseños nuevos que iban saliendo cada vez eran más hermosos según mi juicio estético. Llegué a tener entre mis manos más de mil nuevas ideas gráficas para realizar otros tantos cuadros. Mientras esto sucedía, iba yo pintando al óleo sobre tela una serie de cuadros producto de los diseños que iba obteniendo y que posteriormente se presentaron en una exposición en el Carpenter Center de la Universidad de Harvard.

Puesto que la computadora había sido alimentada exclusivamente con datos relativos a un modelo obtenido a partir de cuadros realizados de una manera intuitiva a lo largo de mi vida, sólo guiado por mi educación y sensibilidad artística, y, a su vez, que la optimización de resultados se llevó a cabo de la misma manera, entonces esta investigación demostró que así como la computadora puede ser dotada de una inteligencia artificial también es posible prepararla para que desarrolle una sensibilidad artificial. De ahí el nombre del libro que escribimos en 1977 en que damos cuenta del proceso y programación completa de esta experiencia: *La máquina estética* (Manuel Felguérez y Mayer Sasson, UNAM, 1983). ♦

Aquiles, la tortuga, Einstein y otras historietas

Paradojas en diferentes ámbitos

◆
MICHAEL BAROT

1. Paradojas para meditar

Una paradoja es, según el diccionario, una contradicción. Frases como "El que más tiene es el más pobre" o "La versión más corregida es normalmente la menos correcta" parecen contradictorias, pero es esta contradicción aparente la que nos fuerza a reflexionar más, y así revela un sentido más profundo: la paradoja es una figura retórica.

La misma técnica fue (o todavía es) empleada en la escuela del budismo zen, pero ahí no sólo como un truco retórico. En el budismo zen se hace hincapié en la meditación como el camino hacia el reconocimiento inmediato de la realidad. Surgida a partir del budismo hindú, esta escuela pasó por China y llegó a Japón alrededor del año 600. Sin embargo pasaron quinientos años para que esta escuela se volviera importante. Esto se debió a la labor de dos monjes que, en la búsqueda del verdadero camino hacia la iluminación, visitaron China y de regreso empezaron a enseñar un sistema que se basó estrictamente en la meditación. Dentro de este sistema el *koan*, que presenta un dilema mental, fue usado como elemento que trata de agotar el razonamiento analítico y la voluntad egoísta. Tal vez el ejemplo más conocido de un *koan* es:

Si dos manos dan una palmada producen un sonido; escucha el sonido que produce una sola mano.

En muchas ocasiones el *koan* tiene la forma de un cuento, por ejemplo:

El maestro Hyakujo quería mandar a un monje a abrir un nuevo monasterio. Por ello dijo a sus alumnos que encarga-

ría la labor a quien pudiera responder mejor la siguiente pregunta. Puso un jarrón con agua en el suelo y preguntó: "¿Quién me puede decir qué es esto sin usar su nombre?" El monje superior dijo: "Nadie puede llamarlo un zapato." Isan, el cocinero, tiró el jarrón con el pie y salió. Hyakujo sonrió y dijo: "El monje superior pierde." Así, Isan se volvió abad del nuevo monasterio.

¿Por qué con un *koan* se quiere agotar el razonamiento analítico? Según el budismo zen, el mayor impedimento para la iluminación es que las palabras dividen al mundo en partes. Bueno lo divide en cosas buenas y cosas malas. Hay una variedad de *koans* que muestran la lucha contra las palabras, contra la confianza en las palabras, la fragmentación del mundo en categorías. Por ejemplo:

Shuzan alzó su bastón corto y dijo: "Si llaman a esto un bastón corto, se oponen a la realidad. Si no lo llaman un bastón corto, ignoran los hechos. ¿Cómo lo quieren llamar entonces?"

¿Por qué nos oponemos a la realidad cuando lo llamamos un bastón corto? Tal vez, porque con esas dos palabras decimos demasiado poco, quedamos en la superficie pero creamos la apariencia de capturar la realidad. Si, por otro lado, no lo llamamos un bastón corto, ignoramos uno de sus aspectos. "No se puede decir con palabras, pero tampoco se puede decir sin palabras" es el comentario de Mumon, maestro zen chino de aquella época.

Tengo que admitir que no he podido resolver ningún *koan*. Hace poco fui a visitar a mi hermano que vive en Japón. Como no había tenido tiempo de informarme sobre este país, me compré el libro *Lost Japan* al transbordar en

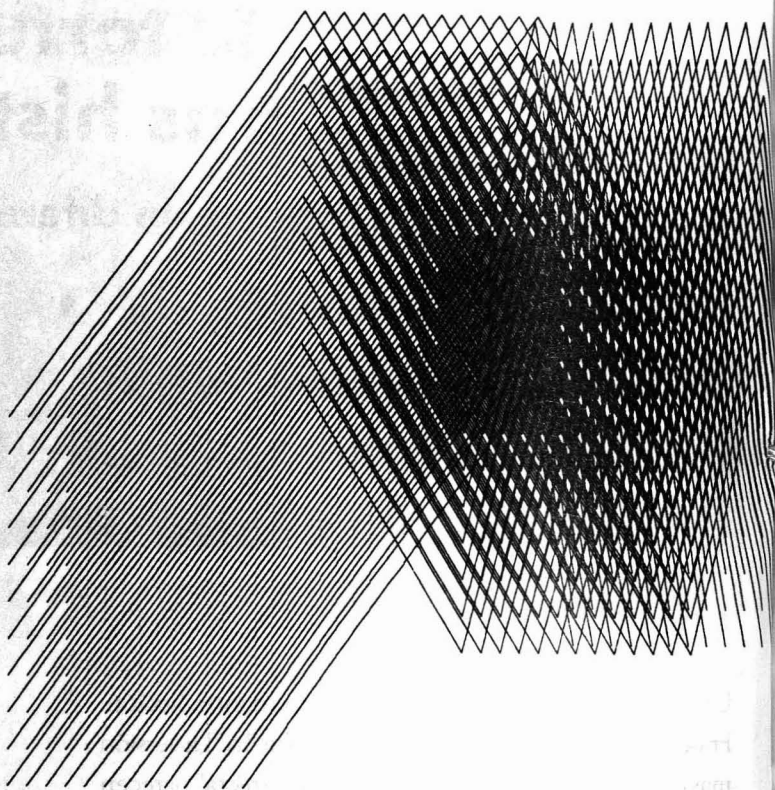
Los Ángeles. El autor, Alfred Kerr, es un estadounidense que, según la breve biografía del libro, fue a Japón por primera vez con sus padres cuando todavía era un niño y desde entonces le fascinaron las culturas orientales. El libro se erigió en mi acompañante fiel y me enseñó aspectos que no hubiera podido ver sin él. Además de describir con gran arte la ruptura que se produjo en el Japón con la importación de la cultura estadounidense, también escribe acerca de las relaciones amistosas que entabló en Japón. Así, cuenta que con mucha insistencia logró que un amigo iniciado en el budismo zen le descubriera la solución del *koan* del sonido de una mano. Alfred Kerr no escribe la solución, sólo menciona que es sorprendentemente sencilla.

Un *koan* contiene normalmente algo paradójico que contradice nuestro *sentido común* (más adelante veremos más paradojas de este tipo). Lo enigmático de un *koan* nos estimula, aunque tal vez no logremos resolverlo (también este rasgo lo reencontraremos más tarde en otras situaciones).

2. Paradojas en la antigua Grecia

El método de exponer dos puntos de vista opuestos o competitivos ha sido empleado con diferentes intenciones desde muy temprano en la historia de la humanidad. En efecto, Parménides, que nació alrededor de 515 a. C., argumentó que no puede haber nada que no exista, que los fenómenos de la naturaleza son errores de la percepción humana y que no tienen existencia propia, la cual sólo asignó a un *ser absoluto*. Así, el movimiento es imposible, ya que, para que un objeto se mueva, debe existir antes un espacio vacío que pueda ocupar el objeto después del movimiento. Su alumno preferido era Zenón de Elea que inventó paradojas muy ingeniosas para defender la posición de su maestro. Así argumentó Zenón:

Aquiles (el héroe más rápido) y una tortuga compiten en una carrera. Aquiles le da a la tortuga una ventaja de un estadio (más o menos 185 metros). Empiezan al mismo tiempo la carrera. Antes de alcanzar a la tortuga, Aquiles tiene que llegar al punto en donde estaba la tortuga cuando empezó la carrera. Pero en el tiempo que necesita para llegar ahí, la tortuga avanza y está más adelante. Otra vez, para que Aquiles alcance a la tortuga, tiene que llegar primero al punto en



donde está ahora la tortuga y mientras tanto la tortuga avanza. Es claro que este "juego" se tiene que repetir un número infinito de veces. Cada vez que Aquiles llega al punto en donde estaba la tortuga, ésta ya avanzó otro poco. Por eso Aquiles nunca alcanzará a la tortuga.

Si confrontamos la argumentación de Zenón con nuestro sentido común, que nos dice que el movimiento existe, tenemos una paradoja. Pero no podemos suponer simplemente lo que nos dice nuestro sentido común, pese a lo convincente que nos parezca, ya que Zenón tiene una argumentación mientras que nuestro sentido común no. Tenemos que entrar en discusión con Zenón y encontrar el punto débil. Eso lo haremos en el siguiente capítulo. Zenón inventó una variedad de paradojas con las cuales quería demostrar que no puede haber movimiento, que el ser no se puede dividir en partes y que no puede haber espacio. Era el tiempo en el cual en toda Grecia surgieron pensamientos importantes. Los griegos se habían defendido de los persas con éxito y la gente de la clase alta vivía con gran lujo. La democracia se había establecido y el futuro se planificaba mediante asambleas en las cuales los hombres libres (mujeres y esclavos no tenían derechos políticos) podían hablar y opinar. Obviamente, los que podían argumentar con más claridad tenían la ventaja, y esto dio origen a los sofistas, maestros de la retórica, que viajaban de lugar en lu-

gar para enseñar por buen dinero el arte de convencer a los demás. Los sofistas no eran filósofos, sino más bien gente práctica que valoraba los conocimientos teóricos por mucho menos que el éxito en la discusión. Según ellos, la moral y la verdad eran cuestión de opinión. Protágoras, el sofista más reconocido (y tal vez más criticado), viajó por toda Grecia y de él se cuenta la siguiente leyenda:

Protágoras enseñó a uno de sus discípulos. Éste le dijo que sólo podía pagarle después de haber ganado su primer caso. El discípulo estudió y cuando estuvo listo esperó para atender clientes. Protágoras, impaciente por obtener su dinero, lo demandó ante un tribunal y argumentó de la siguiente manera: "Si gano, tendré mi dinero por el fallo del tribunal y si pierdo, ganará mi discípulo y me tendrá que pagar como quedamos." El discípulo opuso que no tendría que pagar nada, ya que si ganaba, no tendría que pagar por el fallo del tribunal y si perdía, no tendría que pagar porque acordaron que sólo le pagaría después de ganar el primer caso.

Se dice que el tribunal nunca llegó a una decisión final (¿qué decidiría el lector? La solución de esta paradoja se deja a los malabaristas mentales).

Ambas paradojas, la de Zenón y la de la leyenda, resultan ingeniosas si se piensa en la época en que fueron elaboradas (500 a. C.), aunque son muy diferentes en sus intenciones. Sócrates, cuando era joven, escuchó a Parménides en Atenas. Platón, que pone a Sócrates como figura central en casi todas sus obras, ataca tanto a los sofistas como a Parménides y a Zenón en sus obras.

3. Sobre lo infinito

La paradoja de Zenón se basa en un argumento sobre lo infinito. En 1851 se publicó *Paradojas del infinito* de Bernardo Bolzano, un matemático checo; sin embargo, el libro quedó en el olvido durante mucho tiempo. En él, Bolzano aclara que muchas paradojas en las matemáticas recurren implícita o explícitamente a la noción del infinito y por ello trata de aclarar esta noción. Bolzano muestra que una parte de un conjunto infinito puede ser igual de grande que todo el conjunto (esto ya lo había observado Galileo) y la manera como lo demuestra anticipa ya el trabajo de Georg Cantor, quien introduce treinta años después la noción de *cardinalidad*, que es el término técnico para el tamaño de un conjunto.

Un hotel con infinitos cuartos (enumerados por 1, 2, 3, 4,...) está completamente ocupado. Sin embargo, cuando llega un nuevo huésped, el hotelero dice: "No hay problema, siempre tengo un cuarto libre."

Pronto veremos cómo se resuelve esta paradoja. En el tiempo de Bolzano, un *conjunto* era simplemente una colección de objetos con la propiedad de que podía decidirse si un *objeto pertenecía* a esta colección o no.

Un conjunto es *finito* si sólo tiene un número finito de objetos, de lo contrario se dice que es *infinito*. Si hay dos bolsas con granos de café y queremos saber cuál contiene más granos, sólo tenemos que contar los granos de cada una de las bolsas y comparar los dos números de nuestro conteo. El proceso es fácil porque en cada bolsa sólo hay un número finito de granos. Pero, si tenemos que "contar" los objetos de un conjunto infinito, ¿cómo lo haremos? ¿Son dos conjuntos infinitos siempre igual de grandes?

Hay una manera de comparar el número de granos en las dos bolsas sin que sea necesario contar los granos: sacamos de cada bolsa un grano y lo dejamos afuera. Luego sacamos otra vez de cada bolsa un grano y también lo dejamos afuera. Si procedemos así, llegaremos (tal vez después de horas) al punto en que una de las dos bolsas quede vacía y solamente tendremos que checar si en la otra bolsa todavía hay granos o no. Con este procedimiento no es necesario saber el número exacto de granos en cada bolsa. Si las dos bolsas tienen el mismo número de granos obtenemos una correspondencia *uno a uno* entre los granos de una bolsa y los de la otra: al primer grano de una bolsa corresponde el primer grano de la otra bolsa, al segundo grano de una bolsa le corresponde el segundo grano de la otra bolsa. Luego se corresponden los terceros granos, los cuartos y así sucesivamente.

Una *función* es una instrucción que describe cómo obtener de un número dado x , el *argumento*, un nuevo número y , el *valor*, que está determinado completamente por x . Así, por ejemplo, $y = x + 1$ es la instrucción "aumentar el número dado por 1" y $y = 2 \cdot x$ es la instrucción "multiplicar el número dado por 2".

Denotamos por N al conjunto de los números 1, 2, 3, 4,... y con N_2 al conjunto de los números 2, 3, 4, 5,... Claro, N_2 es una parte de N . Nuestro sentido común nos dice que, por lo tanto, N es *más grande* que N_2 . Sin embargo, la función $y = x + 1$ establece una correspondencia uno a uno entre los dos conjuntos infinitos (véase la figura 1).

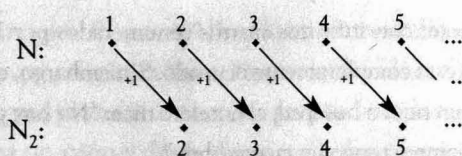


Figura 1

Así se resuelve la paradoja del hotel: el hotelero manda a cada huésped al siguiente cuarto y así queda libre el cuarto con el número 1.

Los números *reales* forman un conjunto que se puede pensar como una línea recta e infinitamente extendida. Los números reales que son mayores o iguales a 0 y menores o iguales a 5 forman un *intervalo* que se denota por $[0,5]$. Este intervalo es un conjunto infinito; por ejemplo, los números 4, 4.1, 4.11, 4.111 etcétera pertenecen todos ellos a este intervalo.

Bolzano muestra, intuyendo ya la noción de Cantor, que $[0,5]$ (los números mayores o iguales a 0 y menores o iguales a 5) es *igual de grande* que $[0,10]$. Nuestro sentido común nos dice que $[0,10]$ es lo *doble de grande* que $[0,5]$ pero la función $y = 2 \cdot x$ establece una correspondencia uno a uno entre los dos intervalos (véase la figura 2).

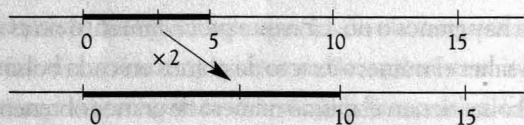


Figura 2

El argumento constituye una paradoja tomando en cuenta nuestro sentido común, que nos indica que $[0,10]$ es más grande que $[0,5]$. La paradoja se resuelve en cuanto fijamos una noción consistente en comparar el “tamaño” de dos conjuntos y se resuelve en contra de nuestro sentido común.

Los matemáticos alemanes Georg Cantor y Richard Dedekind, que son considerados como los fundadores de la teoría de los conjuntos, se encontraron por casualidad en 1872 en Suiza. Con este encuentro empezó una correspondencia entre ellos que da fe del logro antes mencionado. Cantor demostró que hay más números reales que *naturales* (los números naturales son 0, 1, 2, 3, ...) y mandó su argumento a Dedekind, quien lo simplificó. Después, Cantor mandó una demostración a Dedekind de que el conjunto de los puntos que se encuentran en un lado de un cuadrado tiene el mismo “tamaño” que el con-

junto de todos los puntos del mismo cuadrado (véase la figura 3).



Figura 3

Dedekind mostró que el argumento de Cantor era incompleto y se lo escribió. El argumento que hoy se usa se le asigna a Giuseppe Peano, matemático italiano. Sin embargo, la teoría de los conjuntos pronto se encontró en apuros a consecuencia de diversas paradojas; Cantor mismo encontró una de ellas en su teoría en 1895. La profundidad de los problemas de la teoría fue evidente cuando en 1901 Bertrand Russell, filósofo y matemático inglés, descubrió una paradoja sencilla que desde entonces se llama simplemente *paradoja de Russell*.

Todos los conjuntos forman una colección bien definida. Si C denota al conjunto de todos los conjuntos, observamos que C es un objeto de C , es decir, el conjunto se contiene a sí mismo como uno de sus objetos. Si un conjunto se contiene a sí mismo, lo llamaremos *extraño*. Sea ahora E el conjunto de todos los conjuntos que no son *extraños*.

Nos podemos preguntar si el conjunto E es extraño o no. Si es extraño, entonces contiene a E como objeto. Pero, como hemos dicho, los conjuntos que pertenecen a E no son extraños, así que E no es extraño. Empezamos nuestro argumento con si E es extraño y lo terminamos con *así que E no es extraño*; eso es una contradicción.

Si E no es extraño entonces E pertenece a la colección de los conjuntos que no son extraños. Pero esta colección la habíamos denotado con E , así que E pertenece a E o, dicho de otro modo, E es extraño. Otra vez encontramos una contradicción.

En todos los casos encontramos una contradicción: si E es extraño y si E no es extraño. Entonces E no puede ser ni extraño ni no extraño. Así que E no es un conjunto (recuerdo que habíamos dicho que de un conjunto siempre se puede decidir si un objeto le pertenece o no). Ésta es la paradoja.

La publicación de la paradoja en 1903 por Russell y Gottlob Frege, un matemático alemán que trató de basar la aritmética en la lógica y que se había dedicado a estudiar

las ambigüedades del idioma, provocó una crisis profunda entre los matemáticos. Frege dejó de publicar para siempre al no poder resolver la paradoja. Ésta había atacado el núcleo del sistema teórico de Frege, gracias al cual había logrado capturar con rigor *fórmulas y demostraciones* como objetos matemáticos tan bien definidos como los números.

Lo que había encontrado Russell era una antinomia, es decir, una contradicción en un sistema que no puede resolverse dentro del mismo sistema. Había que modificar la teoría de los conjuntos. En 1909 Russell presentó su teoría de tipos y Ernest Zermelo, matemático alemán, su sistema axiomático para la teoría de conjuntos. El problema es tan profundo que estimuló la lógica y otros campos de las matemáticas. La paradoja de Russell, que se basa en la *recursividad* de las nociones, se parece, en el fondo, a la vieja *paradoja del mentiroso*:

A: "Lo que digo es falso".

Como habíamos dicho, la paradoja de Zenón contra el movimiento se basa también en la noción del infinito. Para Zenón no era posible partir una cosa (espacio o tiempo) en un número infinito de partes. Si suponemos que pasan 10 segundos entre el momento en que Aquiles empieza la carrera y está por primera vez donde estaba la tortuga, pasará menos tiempo hasta que esté en el punto P (véase la figura 4: A denota la posición de Aquiles, T, la posición de la tortuga), digamos 1 segundo. Para el siguiente paso necesitará $\frac{1}{10}$ de segundo, para el siguiente sólo $\frac{1}{100}$ de segundo y así sucesivamente.

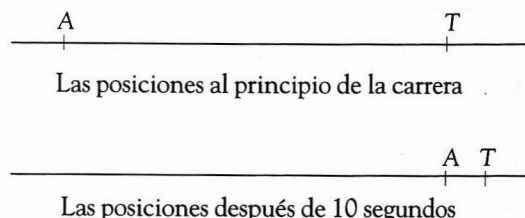


Figura 4

En total pasarán

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = 11.1111 \dots$$

segundos —un tiempo finito para que Aquiles alcance a la tortuga—. Es cierto que tendré que dibujar un número infinito de dibujos, pero también tendré que dibujar cada vez más rápido (diez veces más rápido que la vez anterior), así que transcurre solamente un tiempo finito.

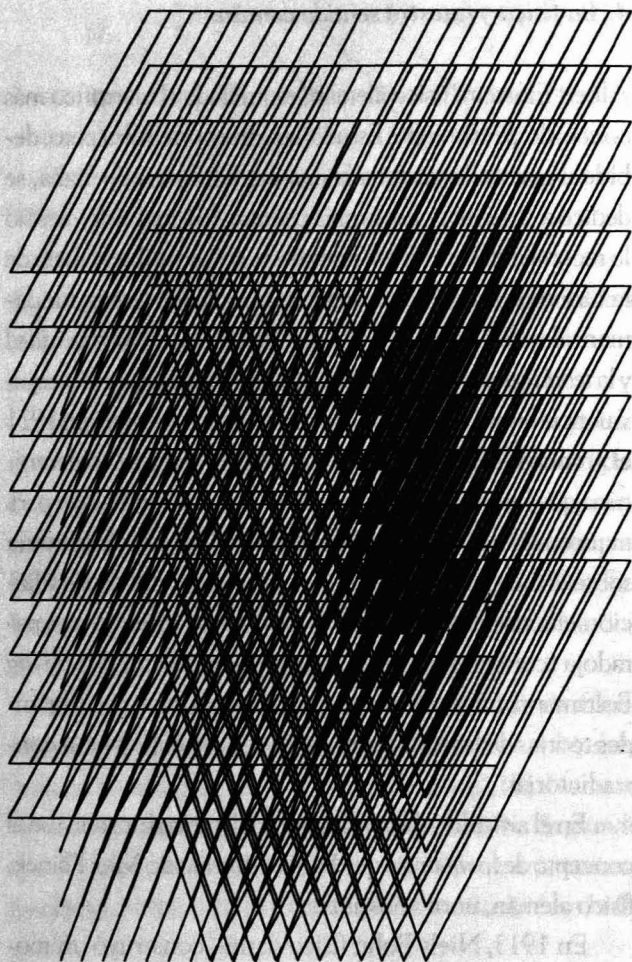
4. La física y nuestro sentido común

Albert Einstein, físico alemán, es sin duda el científico más conocido de este siglo. Estudió su carrera en Suiza pero, debido a que no le gustaba la manera como se enseñaba, se dedicó a estudiar por su propia cuenta. Así, los profesores no lo recomendaron para un puesto y tuvo que trabajar fuera de la Universidad para mantenerse. Fundó dos teorías fundamentales de la física actual: la *teoría especial de la relatividad* y la *teoría general de la relatividad* (en la última expone la equivalencia entre masa y energía). Sin embargo, recibió en 1921 el premio Nobel por un artículo sobre el efecto fotoeléctrico que había publicado en 1905 mientras trabajaba para mantenerse. El artículo contiene una idea revolucionaria sobre la naturaleza de la luz (o, más en general, de la radiación electromagnética). Con esta idea se resolvió una paradoja (conocida como la *catástrofe ultravioleta*) de Ludwig Boltzmann, matemático austriaco, que mostró que las grandes teorías de la física hasta entonces conocidas eran contradictorias.

En el artículo sobre el efecto fotoeléctrico Einstein usó el concepto de los *quantos* que había introducido Max Planck, físico alemán, unos años antes.

En 1913, Niels Bohr, físico danés, construyó un modelo de átomo; la existencia del átomo había sido asegurada dos años antes por los experimentos de Ernest Rutherford, físico inglés. Durante los siguientes doce años, científicos como Louis-Victor Broglie (francés), Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger y Wolfgang Pauli (alemanes) elaboraron un modelo matemático sobre el mundo de las partículas con predicciones que correspondían correctamente con los experimentos. En 1935, más o menos empezó a consolidarse la teoría de la mecánica cuántica, aunque aún provocaba dudas pues, si bien sus fundamentos estaban establecidos y aceptados, la interpretación de lo que habían creado los físicos no era clara. Sus consecuencias contradicen en varios aspectos nuestro sentido común, que está acostumbrado a un mundo "clásico" de objetos grandes.

Einstein nunca terminó de aceptar esta teoría en cuyo nacimiento él mismo había colaborado. En discusiones con Niels Bohr intentó encontrar contradicciones en ella. Bohr se había convertido en el centro de intercambio de opiniones e interpretaciones durante el desarrollo de la teoría por su manera flexible y abierta de tratar los diferentes y aparentemente paradójicos resultados que arrojaban los nuevos conocimientos. En la fase de consolidación de la mecánica cuántica, Einstein otra vez se destacó como gran



pensador. Ya convencido de que la teoría cuántica era consistente (sin contradicciones), desarrolló una paradoja que publicó en 1935, junto con Boris Podolski y Nathan Rosen, y que ahora lleva sus nombres. Einstein era famoso por sus *experimentos mentales*, experimentos que no se hacen de verdad, sino sólo se piensan.

La explicación de la paradoja de Einstein, Podolski y Rosen nos llevaría a demasiados detalles técnicos de la teoría cuántica. Sólo podemos dar una idea vaga de ella. El lector interesado podría encontrar una exposición detallada en el libro *Aufbau der Physik* de Carl Friedrich Weizsäcker, físico alemán, o más brevemente en el libro *The Emperor's New Mind* de Roger Penrose, físico-matemático inglés.

Lo que nos dice la paradoja de Einstein, Podolski y Rosen es que la hipótesis de una realidad objetiva es incompatible con la teoría cuántica. La hipótesis de una realidad objetiva afirma que lo que medimos (el lugar en donde se encuentra una partícula o su velocidad) es así en el momento previo a la medición. Por ejemplo, si tenemos que una partícula se encuentra a dos metros de distancia de una muralla, suponemos entonces que la partícula estaba ahí en el momento

previo a la medición de la distancia entre ésta y la muralla. La hipótesis de una realidad objetiva parece natural. Pero la teoría cuántica afirma que esta hipótesis es falsa; lo que medimos y la manera como lo medimos influye en el resultado de la medición. Éste es el punto que aclararon Einstein, Podolski y Rosen con su paradoja. Todas las teorías anteriores pusieron al observador fuera del experimento, como algo ajeno; la teoría cuántica lo incluyó como parte imprescindible. Por ello, la teoría enfrentó una crítica dura y hasta hoy no deja de extrañar a los físicos. Einstein no quería aceptar la teoría como definitiva, sólo la vio como algo temporal que más tarde tendría que ser reemplazada por una mejor.

Sin embargo, la teoría está ahora entre las más exitosas de la historia al hacer posible los microscopios electrónicos, el láser y la tomografía, entre muchos otros inventos técnicos. Hoy en día tenemos más elementos para rechazar la hipótesis de una realidad objetiva y aceptar la teoría cuántica. La naturaleza no siempre se comporta como nuestro sentido común espera. Ésa es una *lección* que nos enseñó la física moderna.

La siguiente paradoja, que, para su comprensión, requiere menos conocimientos especializados, trata otro aspecto interesante de la naturaleza.

Planteamiento:

Un maestro dice a sus alumnos: "En la siguiente semana presentarán un examen, pero no sabrán con anticipación el día que va a ser." Pregunta un alumno: "¿No lo sabremos ni en la mañana del día del examen?", y el maestro responde: "Ni en esa mañana."

Argumentación lógica: (no se puede llevar a cabo el examen).

El examen no se podrá aplicar el último día de la semana, el viernes, ya que los alumnos lo sabrían en la mañana. Entonces tendrán que hacerlo entre el lunes y el jueves. Pero, siguiendo el mismo argumento, el día del examen no puede ser el jueves. Así que sólo quedan lunes, martes y miércoles. Tampoco el miércoles con el mismo argumento, y así sucesivamente. Así que no podrá hacerse el examen nunca.

Evidencia: (el examen se puede hacer).

Si el maestro aplica el examen el miércoles, los alumnos no lo sabrán con anticipación.

El maestro hace dos afirmaciones:

a) En la siguiente semana tendrán un examen.

b) No sabrán con anticipación cuándo va a llevarse a cabo el examen.

La paradoja consiste en la oposición entre una argumentación lógica, que muestra que las dos afirmaciones no pueden ser ciertas al mismo tiempo, y la evidencia, que muestra que sí pueden resultar ciertas las dos.

La solución de la paradoja es la siguiente: las afirmaciones sobre el futuro tienen la característica de ser *probables* pero no *seguras* (o *verdaderas* o *ciertas*). Las afirmaciones del maestro constituyen pronósticos sobre el futuro y, por lo tanto, tienen cierta probabilidad de resultar verdaderas y cierta probabilidad de resultar falsas. Tenemos la tendencia de equiparar probabilidades que son muy altas con *certeza* o *seguridad*. La argumentación lógica antes expuesta se basa en que las dos afirmaciones del maestro (*a* y *b*) son ciertas de antemano, es decir, al principio de la semana, y así conduce a una conclusión errónea. La evidencia sólo muestra que las dos afirmaciones (*a* y *b*) *pueden* resultar ciertas.

Si suponemos que el maestro elige el día del examen al azar (por ejemplo, con un dado), de modo que cada día tenga la misma probabilidad de ser el del examen, podemos ver que hay veinte por ciento de probabilidad de que sea el viernes y los alumnos sepan esa mañana que ese día será el examen. Es decir, hay veinte por ciento de probabilidad de que las afirmaciones del maestro no resulten ciertas.

Quien toma pronósticos por falsos o verdaderos no podrá explicar las consecuencias lógicas con su sentido común. La teoría de probabilidades formaliza en este caso el sentido común y le da una base sólida. El modelo físico sobre la naturaleza del futuro se expresa en términos de los pronósticos, los cuales presentan la característica de ser probables.

5. Notas finales

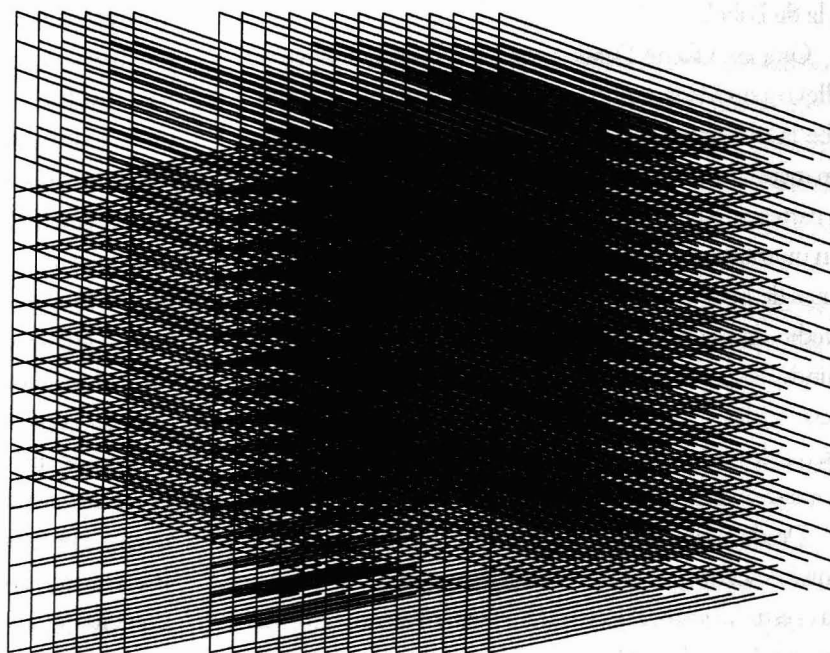
Tal vez haya quien considere que las paradojas son algo molesto, que se inventan sólo para trastornarnos la vida. Opino lo contrario. Las paradojas tienen el efecto de hacernos pensar y reflexionar sobre nuestros conocimientos. Gracias a este tipo de reflexiones podemos llegar a un entendimiento más profundo. Como consecuencia, tal vez tengamos que abandonar teorías completas, o quizás podamos resolver la

paradoja. En ambos casos obtendremos un conocimiento más amplio.

Además, las paradojas suelen ser catalizadores del desarrollo científico. La contradicción induce a la reflexión y estimula el pensamiento. Parménides y Zenón forzaron a otros pensadores a argumentar mejor; las paradojas iniciales en la teoría de conjuntos estimularon la lógica; las paradojas alrededor de la teoría cuántica provocaron una reflexión sobre la naturaleza de nuestro mundo que todavía no ha acabado. ♦

Bibliografía

- Capelle, Wilhelm (ed.), *Die Vorsokratiker*, Alfred Kröner Verlag, 1968.
- Dieudonné, J., *Geschichte der Mathematik 1700-1900*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag, 1985.
- Hofstadter, Douglas R., *Gödel, Escher, Bach*, Tusquets Editores, 5ª ed., 1995.
- Penrose, Roger, *The Emperor's New Mind*, Vintage, 1990.



- Platón, *Diálogos*, Porrúa, 1996.
- Störig, Hans Joachim, *Kleine Weltgeschichte der Philosophie*, Fischer Taschenbuch Verlag, 1987.
- Straumann, Norbert (ed.), *W. Pauli: Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, Springer Verlag, 1990.
- Weizsäcker, Carl Friedrich von, *Aufbau der Physik*, Carl Hanser Verlag, 1986.

Entre lo acabado y lo siempre abierto: exactitud y analogía

♦
SOFÍA REDING BLASE

La pesadilla de todo científico, o de quien aspire a serlo, es no poder dar cuenta con exactitud de este gran libro que es el mundo. La última vez que alguien intentó llegar a lo “exacto”, cuenta un muy antiguo mito, todo se vino abajo. Los medievales llamaban Casa de Dios a las torres que hacían las veces de manicomios, en recuerdo de la de Babel.

Gracias a René Descartes y a ese as en la manga que le llevó a sus *Meditaciones metafísicas* (el dios en cuyo ser no cabe la inexactitud, o sea, el perfecto) pudieron respirar con menos intranquilidad quienes encontraron en el método cartesiano las reglas para conducir sus investigaciones con un mínimo de equivocidad. Sin embargo, cuando algunos de los seguidores del método se involucraron en el estudio de esa humanidad que también forma parte del mundo, las cosas comenzaron a tornarse imprecisas y el pánico cundió. Tan diverso el mundo y tan diversas sus partes, que los cartesianos optaron por analizar la cultura conforme se avanzaba en el estudio de la naturaleza.

Desde el siglo XVII y tras bruscos cambios y desconcertantes descentramientos, la meta que se pretendía alcanzar era el estudio justo, concienzudo, puntual del mundo, “conforme a las reglas del método”. Así fue como la palabra *exacto* adquirió su verdadero significado: acabado. El estudio de la naturaleza, cuyo ámbito es lo determinado, apareció mucho menos complicado e inclusive se pudo ya hablar de “ciencias exactas” como aquellas que, a condición de que siguieran los procedimientos adecuados, evitarían caer en el error o en el absurdo. René Descartes y Thomas Hobbes consideraron que, a su manera, habían probado que todo en el mundo era susceptible de ser calculado y computado

al sumar, restar, dividir y multiplicar lo que aparecía ante sus ojos. Lo que se planteaba era que mediante estas operaciones se podían distinguir y controlar los objetos de estudio para desembocar así en el conocimiento buscado, es decir, para que el científico pudiera dar por terminada, al menos en parte, su investigación.

En lo que a la humanidad se refiere, se pensó durante mucho tiempo que bastaba encontrar un camino, bien recto y sin distracciones, para descubrir, con un mínimo de error, lo universal que se escondía tras lo diverso. Sin embargo, en el ámbito de lo humano no todo se puede computar porque hay también una gran dosis de misterio intraducible a un código binario. De todas formas, en el campo de las ciencias humanas también se ha buscado alcanzar la exactitud, llegar a descubrir lo *inmutable* gracias a una actitud pulcra, meticulosa y rigurosa. Sobra decir que esta postura no considera al científico social ni como agente de cambio social ni como intérprete, sino como una especie de sujeto metahistórico que presume siempre de la nitidez con que percibe tanto la sincronía como la diacronía. Este individuo, teóricamente ubicado fuera del tiempo y del espacio, podría descubrir las leyes que supuestamente gobiernan la vida social, de manera semejante a las que caracterizan a la naturaleza.

Ése fue, en suma, el propósito del francés Auguste Comte: reducir al mínimo los equívocos y descubrir lo homogéneo a pesar de la heterogeneidad. Su meta era pues disminuir los errores mediante la reducción de las diferencias. Buena intención, pero mal camino, puesto que partía de un criterio determinista que confundía natura con cultura y el ámbito de lo determinado con el de la libertad, lo cual

no se aplica ni en el caso del estudio del hombre, en el que lo cultural difícilmente se separa de lo natural. Aunque es cierto que la naturaleza nos ha provisto como especie de un tipo específico de manos, lengua y cerebro, no podemos caracterizar nuestra vida social como el resultado de una regulación exclusivamente biológica.

Pero incluso en nuestros tiempos, en que las llamadas "ciencias duras" comienzan a suavizarse porque la realidad aparece menos nítida, esta tentativa de reducir lo humano a lo exacto sigue más o menos vigente. Para el caso podemos considerar, por ejemplo, los estudios que dan por sentado que son nuestros genes los que determinan la sociedad y así se justifica que algunos grupos humanos se vean más favorecidos por determinado sistema social que otros (que, por lo demás, suelen ser la inmensa mayoría). Tal es el sustento de los prejuicios raciales o sexuales.

De ahí que el intento por llevar al campo de lo terminado, de lo exacto, los estudios sobre las sociedades humanas permita dar rienda suelta a actitudes intolerantes y pretenda la homogeneidad económica, cultural, social y política de los seis mil millones de seres humanos con el pretexto de que, como resultado de un cálculo racional de *todo*, se ha llegado a comprobar que hay una forma de vida y de producción que es la mejor. En pocas palabras, la fórmula ha sido fríamente calculada y el estudio social puede darse por terminado: no hay otra interpretación posible de la realidad que aquella que ha llevado a encontrar las claves del "progreso", que suelen ser, las más de las veces, privativas de ciertos grupos humanos.

Frente a ese reduccionismo positivista, el relativismo cultural, cuyo origen puede encontrarse en las teorías de Wilhelm Dilthey bajo la denominación de historicismo, asegura que ninguna cultura puede ser medida con los parámetros de otra. El relativismo vino entonces a establecer que todas las culturas son igualmente válidas. Esta postura teórica, a pesar de sus deficiencias, propicia en el científico social una actitud más tolerante respecto a otras culturas. Para el relativismo, cada conocimiento, cada filosofía entendida como la verdad, es relativo a cada tiempo. A eso se debe que, según Dilthey, no haya necesidad de explicar, sino más bien de comprender la experiencia histórica que toma temporalidad en el ser que experimenta y crea. Si la *verdad* es relativa al tiempo, cada situación tendrá su propia verdad, relativamente válida, en concordancia con la circunstancia en la cual fue concebida. Así, lo exacto sólo lo sería en una época y no forzosamente en otra, ya que las "ciencias de la vida" (como gustaba llamar Darcy Ribeiro

a las ciencias sociales), al ocuparse de lo humano, no podrían dar por terminada ninguna investigación, so pena de pecar de dogmatismo.

Sin embargo, el que existan varias verdades no significa que todas ellas sean igualmente válidas o que una sola sea, si se nos permite la redundancia, la "verdad verdadera". Parece que el concepto de *verdad* no es unívoco o equívoco, sino más bien multívoco, en particular cuando se pretende hacer, en el campo social, un estudio *exacto*. La teoría social debe encaminarse a buscar y encontrar causas, por eso se dice que es necesario organizar el análisis de modo imparcial. Ocurre, no obstante, que nuestra propia indagación se inserta en una estructura cultural e historizada y tendemos a pensar que es una alternativa entre varias o bien la única posible. Entonces, ¿hasta qué punto se puede llevar a cabo una investigación al modo de las "ciencias exactas" sin que nos sintamos desamparados por una aparente imposibilidad de exactitud?

Lo mejor, dice Agnes Heller, es que se construya una teoría que no contemple la desaparición de los valores, que siempre ha sido el obstáculo para la precisión. Más bien se trata de encontrar aquellos que no sean discriminatorios:

Si organizamos el material histórico a partir de valores no discriminatorios y reflejados, si comprendemos las épocas presentes-pasadas de acuerdo a sus costumbres y, por consiguiente, comunicamos con sus sujetos agentes de ser humano a ser humano, entonces *somos* objetivos. Según esta primera aproximación, la objetividad en la historiografía es el "medio" aristotélico entre dos extremos: la mera ideología y la mera filología. (*Teoría de la Historia*, Fontamara, México, 1993, p. 115.)

El método, entonces, se ha modificado con respecto a su primer momento: observación, sí, pero con miradas no discriminatorias; análisis y síntesis, sí, pero con entendimiento abierto a la comprensión de las múltiples circunstancias en las que lo humano se desenvuelve, y, finalmente, enumeración en la medida de lo posible y sin excederse en las conclusiones, pasarlas por alto o inclusive omitirlas.

Paul Ricoeur escribió:

El historiador va con su propia experiencia humana hacia los hombres del pasado. El momento en el que la subjetividad del historiador toma un relieve sobrecogedor es cuando, allende toda cronología crítica, el historiador hace surgir los valores de vida de los hombres de antaño. Esta evocación

de los valores, que es finalmente la única evocación de los hombres que nos sea accesible a falta de poder revivir lo que ellos vivieron, no es posible sin que el historiador esté vitalmente "interesado" en esos valores y con los cuales sienta una profunda afinidad. (*Histoire et Vérité*, Seuil, París, 1955, p. 31.)

En este sentido, el historiador accede a los mundos de antaño por empatía, con el fin de poder explicar (hasta donde sea posible) y comprender (hasta donde sea posible también) lo que no le tocó vivir. En este caso se precisa de lo que Heller denomina una "alta teoría", esto es, una postura teórica constituida por criterios que permiten valorar la multiplicidad que lo humano puede producir y reflejar. Estos valores, que son conscientes, abiertos a la revisión constante y a la reflexión metódica, permiten "leer" otras circunstancias que en primera instancia nos resultan absolutamente ajenas pero que, tras un ejercicio intelectual y emocional, nos parecen, cuando menos, próximas. Este tipo de acercamientos no son producto de homologías univocistas o de excesivas metáforas, sino de analogías.

El científico racionalista considerará que sus investigaciones son "exactas" en la medida en que impida a toda costa que surjan sus propios valores y consiga encontrar leyes que, como en la naturaleza, se apliquen inevitablemente al campo de lo social, según se manifiestan en el mundo natural. Encuentra lo inmutable y delimita su objeto de estudio para controlar los resultados. Frente a esta fría posición encontramos otra, más bien romántica. Se trata aquí de un "científico" cuya actitud no pretende delimitar, sino sólo escuchar voces. Sin embargo, lo cierto es que ninguna de las dos posturas conviene del todo a los propósitos de la ciencia: una es demasiado cerebral y no siempre comprende lo que es diferente; la segunda es muy sentimental, incapaz de explicar plenamente por qué la vía que escoge hacia la objetividad es una subjetividad que a la larga resulta incomunicable. El falso dilema consiste entonces en querer ubicarse entre lo exacto, esto es, lo ya dicho, y el misterio, sobre el que no hay nada que decir puesto que todo es relativo.

Para evitar una insensata elección acudimos a la analogía que, según como dijo Aristóteles, se ubica entre el exceso y el defecto, y hace posible una percepción mesurada y una concepción acorde con la realidad porque, si bien es cierto que los testimonios escuchados serán organizados con un innegable impulso hacia la objetividad, la comprensión y la explicación de los hechos sociales no significan

ni la parálitica homogeneidad ni la epiléptica diversidad de interpretaciones. Mediante la analogía podemos captar lo común sin perder de vista las diferencias, hecho que en el campo de la cultura es vital, porque es el campo de la polisemia, de los múltiples significados. Explicar significa 'hacer entender', es decir, aprender a escuchar los testimonios de otros y organizarlos de modo que se puedan explicar, esto es, traducirlos para que sean susceptibles de ser entendidos. La analogía permite echar luz sobre el hecho social e interpretarlo y ello, a su vez, conduce a otras interpretaciones que lo conservan vigente. De esta forma se complementa el método de explicación deductiva con la comprensión hermenéutica. Gracias a esta prudente actitud se pueden formular hipótesis producto de las analogías que permiten contemplar las diferencias como el elemento principal y la unidad sólo como un aspecto proporcional.

Hermeneia es una palabra que nos recuerda al dios griego Hermes, nacido del inmortal Zeus y de una mortal de nombre Maia. Este híbrido, esta especie de mestizo, tenía por encargo ser el mensajero de los dioses. Se dice que Hermes no podía emitir los mensajes más que en los cruces de caminos, es decir, en canales llenos de interferencias, llenos de ruido y de ambigüedad. De ahí que quienes gustan de leer horóscopos juran que los nacidos bajo el signo de Mercurio (como llamaron los latinos a Hermes) suelen ser muy buenos comerciantes así como buenos ladrones a la par que elocuentes y ambiguos.

En el acto de interpretar, las posturas defendidas son básicamente dos: la positivista y la romántica. Para ejemplificarlas cabría recordar dos tradiciones en que la interpretación gozó de gran relevancia: la griega y la hebrea. Para comprender el significado del ejemplo habría que aceptar que, en general, las entidades culturales son producto de la forma en que los actores sociales ordenan y disponen los elementos significativos de sus vidas.

Los antiguos griegos fueron los primeros mediterráneos que intentaron demostrar que todo aquello que puede expresarse unívocamente existe realmente y puede, por tanto, ser aprehendido y explicado con exactitud, de forma tal que la indagación pueda considerarse terminada. A la larga, los mensajes de Hermes, tan ambiguos como complicados, resultaban ser un enorme reto. No en balde el protagonista de la sociedad griega debía ser el filósofo, único individuo cuerdo y capaz de encontrar la unidad del ser, y no el poeta, tan insensato a los ojos de los sabios. El filósofo griego no pretendía de ninguna manera permanecer ignorante, sino que buscaba la verdad que, aunque cubierta con muchos



velos, podía revelarse en virtud del *logos*, de la razón, que de suyo pertenece a lo humano. Los enigmas eran por eso tan comunes en esta cultura: significaban un reto para el intelecto y, más importante aún, si no se resolvían, planteaban un peligro para la vida misma.

Por el *logos* se piensa y por el *logos* se dice. Gracias al *logos*, el ser humano tiene la capacidad de poner orden en una realidad que se le aparece como un rompecabezas, fragmentada en multitud de piezas. Así se encuentra la unidad en la multiplicidad. Aunque con palabras se puede decir mucho (y por eso, como decía Ortega y Gasset, no son fáciles de administrar), con palabras también se formula una investigación, ubicada entre el exceso y el defecto, según lo señaló Aristóteles. El nuevo camino, el nuevo método, será pues el de ordenar las palabras para hablar bien y ponerlas por escrito, para que conste que no siempre se está a merced de Hermes.

Otro camino, esta vez zigzagueante, seguirán los hebreos, siempre a la búsqueda de la Tierra Prometida, a diferencia de los griegos, que ya la tenían. Mientras los griegos con sus filósofos, profesionales de una univocidad garante de la permanencia, se afanaban por encontrar cerebralmente la *verdad*, al estilo que después adoptarían los positivistas, los hebreos con sus profetas, expertos en la equivocidad con la que aseguraban al Innombrable una confianza plena, se contentaban con lo que el Nombre, escondido en una clave impronunciable, quisiese susurrarles al corazón.

Aún hoy, las posturas asumidas en todas las etapas de la investigación social parecen seguir siendo las mismas que

las que nos hemos permitido recordar. Por una parte, tenemos a los científicos obsesionados con observar y aprehender al ser, a lo eterno e inmutable para ponerle nombre. Por otro lado, están los románticos empeñados en escuchar y perderse en la poesía para no nombrar lo que en resumidas cuentas, según ellos, no puede ser nombrado. Aunque no se trata de librarnos de las trampas de Hermes y de salirnos artificialmente del laberinto, ciertamente tampoco se trata de permanecer extasiados en nuestra ignorancia, sobre todo si por ella nos estamos jugando nuestra convivencia. Lo más conveniente sería situarnos en el punto intermedio, porque si bien tenemos corazón, también estamos dotados de razón.

La labor hermenéutica es de suma importancia cuando consideramos cuestiones como las relativas a la comunicación intercultural:

los ecos que se distorsionan en su viaje por el tiempo y el espacio nos confunden y dificultan la búsqueda de los canales más adecuados, con menos ruido o menos saturación, susceptibles de ser utilizados de forma que el mensaje recibido y enviado a los otros adquiera tintes de diálogo. Es por esa razón que la indagación en el terreno de lo humano se parece más al recorrido por un laberinto que al llevado a cabo por el recto camino que señaló Descartes. Son muchas las direcciones y muchas las decisiones que hay que tomar, así como muy altas las cuotas de tolerancia que hay que pagar y la consideración de la que hay que hacer gala. En todo diálogo uno escucha a quien ha dirigido la pregunta y también a quien va dirigida esta pregunta. Como dijo Gadamer: "El horizonte hermenéutico es el horizonte del preguntar" (*Verdad y método*, Sígueme, Salamanca, 1984, p. 447). Queda una interrogante más, a saber: ¿qué hacer con las respuestas que se ofrecen a las preguntas formuladas? ¿Debemos escuchar y privilegiar una sola voz y desechar las demás o, bien, debemos atender de igual manera todas las voces que nos responden?

En su interesante obra *Tratado de hermenéutica analógica* (FFYL-UNAM, México, 1997), Mauricio Beuchot argumenta, en un esfuerzo por poner orden entre la equivocidad y la univocidad, a favor de la multivocidad que sólo podría ser comprendida mediante el uso de la analogía. A grandes rasgos, la tesis de Beuchot consiste en diferenciar entre la hermenéutica de corte positivista, la romántica y la analógica. La primera trata básicamente de interpretar de

una sola manera los resultados obtenidos de una investigación, en aras de emitir leyes aplicables universalmente. La segunda, relativista en extremo, opta por dejar abierta la puerta a cuanta particularidad ocurra con el fin de postular que, a la larga, todas las opciones son igualmente válidas. Las dos posturas terminan por ser reduccionistas.

En cuanto a la hermenéutica analógica, su interés reside, según Beuchot, en que hace posible el acercamiento y el distanciamiento respecto de ese gran texto que es el mundo, con lo que se evita, por un lado, la pretensión de un objetivismo puro y, por el otro, la tentación de un subjetivismo absoluto. Esto es, la analogía impide caer en homologías científicas como también en la acientificidad de la metáfora. El análisis del mundo, que es también un texto, se realiza siempre de manera "relativamente relativa", valga la noción, y así se alcanza un equilibrio entre la interpretación subjetivista y la pretendida objetividad pura.

Los estudios sobre multiculturalismo pueden beneficiarse enormemente con el uso de la analogía, pues es el instrumento más adecuado para pasar de una cultura a otra sin perder las coordenadas de la propia, a la vez que se propicia un diálogo justo entre culturas que son sobre todo diferentes, pero iguales en cierto modo, porque todas han sido creadas por adultos y en ellas se recrean. En este cruce de culturas radica, en realidad, la esencia del mestizo, siempre dispuesto a evaluar su proyecto vital sin entenderlo nunca como acabado, sino más bien abierto a las posibilidades que otras culturas le ofrecen para desarrollarse. No es entonces un sujeto autoconstruido y ya acabado, "exacto", que pueda decir "yo soy el que soy" (como presumía Descartes al recordar lo que Dios le dijo a Moisés), sino más bien un ser siempre a punto de convertirse en algo más.

Ése es el sentido de la noción de interculturalidad: un diálogo siempre abierto a contemplar y asumir otros modos de ser humanos, sin perderse por ello en el anonimato o en el totalitarismo. El mestizo es en sí una analogía, y constantemente hace analogías, puesto que ni pierde su proyecto ni se encierra en él. Como lo señala Michel Serres (*Le Tiers-Instruit*, Bourin, París, 1991), el mestizo sencillamente considera prudente ponderar lo que le conviene y lo que no, en una actitud no discriminatoria o prejuiciada. No utiliza pues a los otros, sino que los escucha y dialoga con ellos para presentarles también lo que crea que pueda servirles, a modo de propuesta y nunca de imposición. Aunque tiene casa propia, el mestizo no le echa siempre llave a la puerta. Incluso si ya va vestido, no duda en confeccio-

narse un traje al modo del de Arlequín, hecho con toda suerte de telas, diseños y colores.

El científico social debe, en cierto modo, tornarse un mestizo. De esta manera, su indagación no se pierde en la desesperación de quien cree que no es posible encontrar algo susceptible de ser universal y tampoco se hunde en el intento de dar por resuelta la cuestión que inicialmente lo llevó a investigar. Encontrará ciertamente algunas explicaciones al hacer un estudio concienzudo, pero no hallará la respuesta final a todo. Este objetivo se le escapará en tanto existan humanos, que son siempre una novedad.

Si la hermenéutica es el arte y la ciencia de interpretar textos, conviene recordar que no todos los textos, aunque ya estén escritos, han sido interpretados con exactitud. No se conoce puntualmente a sus autores o sus motivaciones, el lector no es siempre el mismo y las circunstancias que lo mueven a interrogar un texto en particular tampoco son completamente idénticas. Si consideramos que el mundo mismo es un texto, la cuestión nos resulta más clara porque, pese a no estar acabado, no por eso es desordenado: ni natura ni cultura son productos terminados sino que, al contrario, se diversifican aunque no pierdan cierta unidad. A eso se debe que en las ciencias sociales la exactitud, como sinónimo de *terminado*, no sea una meta al alcance de la mano. Existe, no obstante, la posibilidad de definir el término como el resultado de la explicación y la comprensión que el científico ha alcanzado, en virtud de un método confeccionado a la medida de lo humano: un método, un camino, que en realidad son muchos caminos.

No se pone en duda la utilidad de considerar el concepto de *exactitud* como opuesto al de *ambigüedad* pero, como reflexiona Beuchot, en el terreno de lo humano no podemos llegar a defender nada como acabado puesto que todos los caminos se entrecruzan. Es más, aunque todo científico social se enfrenta con una realidad hecha nudos, algunos de éstos pueden y deben desatarse, mientras que otros no lo permiten. Las encrucijadas, aunque desconcertantes, son menos aburridas que los caminos rectos: en ellas siempre encontramos a alguien con quien conversar. Y si recordamos a los protegidos de Hermes, ese alguien no siempre será un bandido; también puede ser un excelente y elocuente camarada dispuesto al diálogo, lo que, en resumidas cuentas, es más propio de los seres humanos. Recordemos: Descartes al final se quedó solo, como dice en la segunda parte de su *Discurso del método*, para poder encerrarse en su *ego cogito*. Solamente precisó de una compañía que, aunque cálida, siempre fue muda: su estufa. ♦

¿Qué forma tiene el espacio?*

MAX NEUMANN COTO

Si pensamos en el universo como todo lo que existe, y en el espacio como el lugar que ocupa todo el universo, entonces parece natural preguntarse: ¿qué forma tiene el espacio? Los babilonios y los egipcios creían que el universo era una ostra firmemente cerrada, rodeada de agua y sostenida por el firmamento sólido. Esta idea de un universo “cerrado” se transformó profundamente en Grecia, donde ya para el siglo V a. C. se pensaba que el universo era infinito.

La forma es el tema central de la geometría, que se desarrolló a partir de las ideas que se tenían sobre el espacio. La geometría primitiva, basada en la intuición y los experimentos, se transformó en Grecia en una geometría deductiva, guiada por razonamientos lógicos. Así, la geometría de Euclides está basada en ciertos postulados y axiomas, que se suponen ciertos, y a partir de éstos se trata de deducir lógicamente toda la geometría. Algunos de los postulados de la geometría euclidiana son los siguientes:

Una línea recta es la trayectoria más corta entre dos puntos.

Por dos puntos distintos pasa una sola línea recta.

Por cada punto pasa una (y sólo una) paralela a una línea recta dada.

Estas afirmaciones nos parecen tan evidentes, y están tan arraigadas en nuestro sentido común, que no dudamos que la geometría euclidiana sea la geometría de nuestro universo y la única posible. Incluso, en el mundo de la ciencia, durante siglos se hicieron intentos para demos-

trar que el postulado de las paralelas era una consecuencia lógica de los otros postulados. Sin embargo, a principios del siglo XIX, Bolyai y Lobachevsky mostraron irrefutablemente que la búsqueda era una quimera: había otras geometrías en las que los demás postulados de Euclides eran válidos, pero el de las paralelas no. La geometría que descubrieron Bolyai y Lobachevsky es la *geometría hiperbólica*, en la que por un punto pasa no una sino una infinidad de paralelas a una línea recta dada. Esta geometría parecía una mera invención matemática, pero, poco tiempo después, Riemann describió otra geometría más natural en la que no hay ninguna paralela. Las geometrías no euclidianas parecían no tener relación con la realidad hasta que, a principios de este siglo, la naturaleza euclidiana de nuestro espacio fue puesta en duda.

Universos bidimensionales

Si hacemos a un lado nuestro sentido común, lo que sabemos (o creemos saber) sobre el espacio puede resumirse más o menos en los siguientes términos: tiene tres dimensiones, es continuo e ilimitado y se ve igual desde todos los puntos y en todas las direcciones. ¿Qué nos dirá todo esto sobre la forma del espacio? Por ejemplo, ¿podremos deducir a partir de estos elementos que el espacio es euclidiano o, al menos, infinito? Las respuestas a estas preguntas son sorprendentes y para entenderlas vale la pena empezar, como acostumbran los matemáticos, con otras más sencillas.

Imaginemos un universo bidimensional, infinitamente delgado, en el que las cosas y los habitantes no tienen ningún

* Le agradezco a la doctora Martha Takane toda su ayuda, ya que sin ella no habría escrito este artículo.

espesor (aquí cabría preguntarse si hay alguna razón lógica que explique por qué nuestro universo y nosotros tenemos tres dimensiones). ¿Qué forma tendría entonces un universo de dos dimensiones, continuo e ilimitado y que se viera igual desde todos sus puntos y en todas las direcciones? Podría tratarse de un plano, en cuyo caso la geometría euclidiana se ajustaría perfectamente a su forma. Pero ésta no es la única posibilidad: también podría tratarse de la *superficie* de una esfera. En la esfera, las trayectorias más cortas entre dos puntos —las que los habitantes de la esfera percibirían como líneas rectas— son en realidad arcos de círculos máximos (como el Ecuador de la tierra) y como todos los círculos máximos en la esfera se cruzan, no hay líneas paralelas. La geometría que describió Riemann es precisamente la geometría de la esfera, cuya característica más notable es que establece un modelo de universo bidimensional *finito* y, sin embargo, ilimitado (independientemente de la distancia que se recorra en la esfera, nunca se llegaría a un borde).

En realidad, los universos bidimensionales pueden tener una infinidad de formas distintas, muchas de ellas fáciles de imaginar desde nuestra perspectiva tridimensional: en lugar de pensar en la superficie de una esfera, podemos pensar en la superficie de una dona o en cualquier otra superficie sin bordes (una superficie con bordes correspondería a un universo limitado, que se terminaría de pronto). Hay que hacer entonces una primera distinción entre los universos infinitos (llamados *abiertos*) y los universos

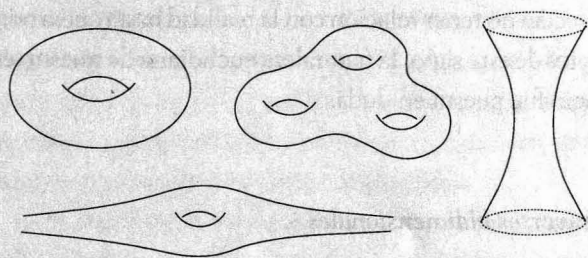


Lámina 1

finitos pero ilimitados (llamados *cerrados*). La lámina 1 muestra dos superficies cerradas: el *toro* (la superficie de una dona) y el *triple toro* (la superficie de una dona triple), y dos superficies abiertas: una en forma de corneta infinita y la otra de toro que ha sido estirado hasta el infinito en dos direcciones (en el papel no hay suficiente lugar para dibujarlas completas, pero hay que imaginarse que se extienden indefinidamente). La corneta infinita es un ejemplo de superficie donde vale la geometría hiperbólica de Bolyai y Lobachevsky.

Una superficie interesante es la banda de Moebius, que se puede hacer al torcer y pegar los extremos de una tira de papel. La banda de Moebius es una superficie *no orientable*: un viajero bidimensional que la recorriera toda se encontraría con que su lado izquierdo se ha convertido en su lado derecho, y viceversa (la lámina 2 muestra al viajero con la mano derecha alzada todo el tiempo, pero en el recorrido de regreso esa mano se ha convertido en la mano

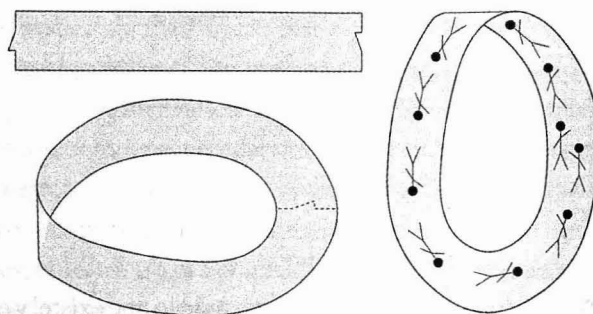


Lámina 2

izquierda). Aunque la banda de Moebius tiene un borde, uno puede intuir que también hay superficies no orientables cerradas y abiertas, pero éstas son más difíciles de visualizar.

Así como nosotros no podemos salirnos del espacio, tampoco los habitantes de una superficie podrían asomarse hacia afuera: todo lo que verían estaría en la superficie misma y lo demás simplemente no existiría. La luz se movería por la superficie siguiendo las trayectorias más cortas, y aunque desde afuera viéramos que estas trayectorias se curvan y se enredan en la superficie, a un observador en la superficie le parecería que la luz se mueve en líneas rectas. Como la impresión del observador sería la de estar viendo en línea recta en todas las direcciones, su *universo visual* (el universo que verían sus ojos, en el supuesto de que su visión fuera ilimitada) sería un plano, por lo que naturalmente pensaría que su universo tiene la forma de un plano.

¿Cuáles serán todas las posibles formas de un universo bidimensional? Si con tres dimensiones podemos visualizar tantas formas distintas, quizás podríamos imaginar muchas otras usando cuatro dimensiones o más. ¿Y cómo podrían distinguirse las distintas formas? El hecho de que el universo visual en todas las superficies sea como un plano sugiere que reconocerlas no ha de ser fácil. Pero antes de hablar de esto debemos ponernos de acuerdo en lo que entendemos por la forma de una superficie.

Forma

La geometría está basada en objetos rígidos y distingue aun las diferencias más sutiles entre las formas, pero a veces esta precisión es excesiva: vistas con cuidado, no hay dos papas en el mundo que tengan la misma forma y, sin embargo, nos gustaría pensar que son esencialmente iguales. Podemos intentar hacer una distinción menos estricta de las formas si pensamos que al deformar ligeramente un objeto su forma no cambia esencialmente.

Decimos que dos objetos tienen la misma *forma topológica* si es posible deformar uno, paulatinamente y sin romper ni pegar nada, hasta llegar a la forma del otro. Para entender la forma topológica, podemos pensar que los objetos están hechos de un material que se puede moldear, comprimir y torcer a voluntad, pero que no puede romperse o pegarse. Es fácil convencerse de que una papa y un plátano tienen la misma forma topológica, pero una papa y una dona no. Con un poco más de imaginación se puede ver que una dona y una taza tienen la misma forma topológica, y también que una azucarera con dos asas y una tetera son topológicamente iguales. La forma topológica puede parecer un concepto vago o subjetivo, pero es en realidad tan riguroso como lo es la forma geométrica.

En topología, las longitudes y los ángulos no tienen ninguna importancia, ya que pueden cambiar cuando se deforman las figuras, y lo mismo puede decirse de las áreas y los volúmenes. La topología es una especie de geometría cualitativa en la que, a cambio de perder los detalles, ganamos una visión clara de las diferencias más profundas entre las formas. Si al pensar en las superficies o los espacios nos interesa reconocer formas básicamente distintas, debemos pensar en su forma topológica.

Rompecabezas

¿Cómo podría un hipotético ser bidimensional imaginarse la forma de la superficie en que habita? Ya que su universo visual sería un plano y en éste no cabe casi ninguna superficie (si lo duda, intente meter una esfera en el plano), es probable que no pueda verla compleja, pero como la superficie se parece *localmente* al plano, si la partiera en pedacitos, como un rompecabezas, éstos parecerían pedacitos del plano, y sí podría verlos. Aunque no pudiera armar el rompecabezas dentro del plano, toda la información sobre la forma topológica de la superficie estaría en la forma de las piezas

y la manera de pegarlas (pero la forma geométrica se perdería al aplanar las piezas).

Por ejemplo, la esfera puede partirse en dos hemisferios que pueden aplanarse hasta convertirse en discos (piezas redondas planas), de modo que la esfera tiene la forma topológica de dos discos unidos por sus bordes. Aunque no podamos armar la esfera dentro del plano, podemos imaginarla si pensamos que los discos están unidos “virtualmente”, de manera que al movernos dentro de uno de ellos y llegar al borde pasaríamos inmediatamente y sin notar nada al otro disco. Podemos hacer lo mismo con el toro, es decir, cortarlo y estirarlo para obtener una sola pieza cuadrada (lámina 3), de modo que uno puede imaginar al toro al unir virtualmente los lados opuestos de un cuadrado.

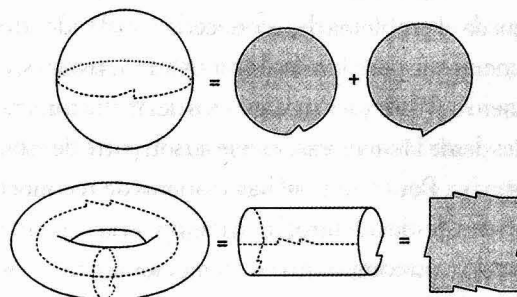


Lámina 3

Todas las superficies son susceptibles de dividirse como rompecabezas, y cualquier rompecabezas que uno inventa lugar a una superficie. Al jugar con rompecabezas uno se topa con sorpresas, ya que algunos, como los de la lámina 4, se resisten a ser armados aun valiéndose de tres dimensiones. Son los correspondientes a las superficies cerradas

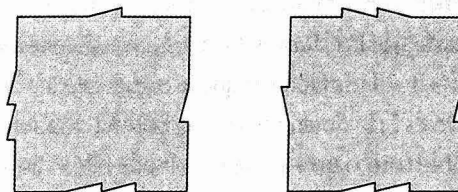
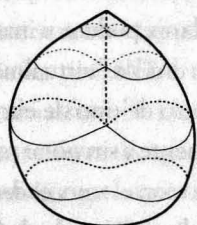


Lámina 4

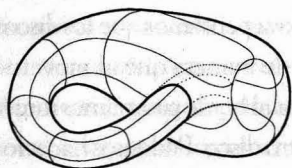
no orientables más sencillas: el *plano proyectivo* y la *botella de Klein*, que al tratar de apretujarse en el espacio de tres dimensiones irremediabilmente se atraviesan a sí mismas, como se muestra en la lámina 5.

Los rompecabezas nos proporcionan una manera de visualizar, sin salir del plano, todas las superficies que pueden existir en cualquier dimensión. Como hay una infinidad de rompecabezas, sería imposible intentar armarlos uno por uno para averiguar todas las formas posibles, pero los topólogos hallaron una manera de simplificarlos todos al

mismo tiempo: recortando las piezas y pegándolas para formar otras distintas, hasta convertirlos en rompecabezas conocidos. Con esta solución mostraron que todas las superficies cerradas tienen la forma topológica de una esfera, de un toro múltiple o de un plano proyectivo múltiple.



Plano proyectivo



Botella de Klein

Lámina 5

Una vez que se sabe cómo son todas las superficies cerradas, queda el problema de reconocerlas desde adentro. Las diferencias que percibimos al usar tres dimensiones, como el agujero del toro y los tres agujeros del triple toro, no son visibles desde la superficie, ya que no son parte de ésta, sino del espacio. Por fortuna, sí hay maneras de reconocer las superficies desde adentro. Imaginemos una superficie armada como un rompecabezas, llamemos aristas a los bordes entre dos piezas y vértices a los puntos donde se unen las aristas y calculemos el número de piezas menos el número de aristas, más el número de vértices del rompecabezas. Por increíble que parezca, el resultado obtenido, llamado característica de Euler de la superficie, no depende del rompecabezas, sino sólo de la forma topológica de la superficie. Por ejemplo, la lámina 6 muestra la esfera dividida como un rompecabezas con 4 piezas, 5 aristas y 3 vértices, y otro rompecabezas con 5 caras, 8 aristas y 5 vértices, así que la característica de la esfera es $4 - 5 + 3$, o sea 2, que es lo mismo que $5 - 8 + 5$. Es fácil ver que la característica del plano proyectivo es 1, la de un toro o una botella de Klein es 0, la de un doble toro o una doble botella de Klein es -2 , etcétera. La característica y la orientabilidad permiten reconocer desde adentro y sin lugar a dudas todas las superficies cerradas.

Curvatura

Una propiedad geométrica de la forma de una superficie es su curvatura. En términos muy generales, la curvatura de la superficie es 0 en los puntos donde se ve plana, es positiva donde se curva como una esfera y es negativa donde se curva como una silla de montar (lámina 7). Hay superficies cuya

curvatura es igual en todas partes, como la esfera o el plano, y otras donde la curvatura varía mucho de un punto a otro, como en la superficie de una papa o de una dona.

Como la curvatura y el área de una superficie que se deforma pueden cambiar mucho sin que se altere su forma topológica, no parecería haber ninguna relación entre ellas. Sin embargo, el teorema de Gauss-Bonnet dice que si calculamos la curvatura promedio de una superficie cerrada, y la multiplicamos por su área, obtendremos la característica de la superficie multiplicada por 2π . ¡Así que la curvatura y el área juntas determinan la forma topológica, salvo por la orientabilidad! Por ejemplo, si el promedio de la curvatura es positivo, entonces la superficie debe ser (topológicamente) una esfera o un plano proyectivo, y si el promedio es 0, entonces la superficie debe ser un toro o una botella de Klein. Para todas las demás superficies cerradas, la curvatura promedio es negativa y la forma depende del área de la superficie. Este teorema ilustra la profunda relación que hay entre la topología y la geometría de las superficies cerradas.

Ya que hay una infinidad de formas posibles de universos bidimensionales, uno puede preguntarse si habrá unas más naturales que otras. Los universos de curvatura constante, como el plano o la esfera, tienen la propiedad de que la visión dentro de ellos es exactamente igual desde cualquier lugar y en cualquier dirección (son homogéneos e isotrópicos), algo que no ocurre con los universos de curvatura

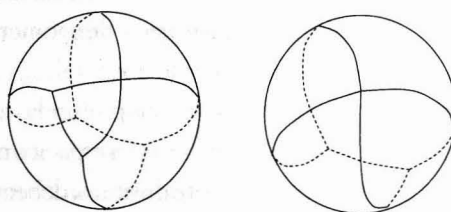


Lámina 6

variable, como la superficie de una dona. A primera vista parecería que la curvatura variable de muchas superficies es una consecuencia de su forma topológica, y que no importa cómo las deformemos, siempre habrá puntos con distinta curvatura. Pero se ha demostrado que cualquier superficie cerrada puede moldearse para que su curvatura sea constante: el plano proyectivo puede moldearse para que su curvatura sea 1, igual a la de la esfera, y el toro y la botella de Klein son susceptibles de moldearse para que su curvatura sea 0, de modo que desde adentro se vean tan planos como un plano. Todas las demás superficies son susceptibles de moldearse para que su curvatura sea -1 , de modo que su geometría sea la geometría hiperbólica de Bolyai y Lobachevsky.

Así que todas las formas topológicas de superficies son igualmente naturales como modelos de universos bidimensionales, y las variaciones en la curvatura de cualquier superficie pueden considerarse deformaciones locales en una superficie originalmente homogénea e isotrópica.

Espacios tridimensionales

Una de las consecuencias de la teoría de la relatividad es que nuestro universo no es euclidiano: la gravedad deforma el espacio alrededor de los objetos, curvándolo, y los rayos de luz no siguen líneas realmente rectas porque no las hay. Nuestro sentido común puede hacernos pensar que estas

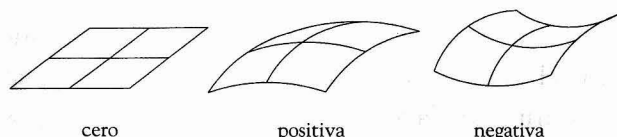


Lámina 7

deformaciones son locales, como pequeñas olas en la superficie de un estanque, y que no cambian básicamente la forma del espacio, que sería casi euclidiano, o al menos, topológicamente euclidiano. Pero nuestra experiencia con los universos bidimensionales debería hacernos dudar: la forma podría ser muy distinta.

Nuestro espacio parece localmente un espacio euclidiano del mismo modo que una superficie se parece localmente a un plano. Así como podemos visualizar muchas formas radicalmente distintas de superficies usando tres dimensiones, uno puede intuir que hay muchas formas posibles de espacios tridimensionales, tanto cerrados como abiertos, que serían fáciles de imaginar si pudiéramos ver en cuatro dimensiones. La forma más simple de un espacio cerrado es la *esfera tridimensional*, que vista en cuatro dimensiones recuerda a la esfera usual pero con una dimensión más. Por suerte no hace falta ver en cuatro dimensiones para imaginarse esto, ya que podemos usar los rompecabezas. La idea es que como el espacio parece localmente un espacio euclidiano, si lo dividiéramos en pedacitos éstos parecerían pedacitos del espacio euclidiano y podríamos verlos. Si imaginamos que el espacio está hecho de un cristal transparente (en lugar de estar vacío) las piezas del rompecabezas serían bloques de cristal sólido. Aunque no podamos armar completamente el rompecabezas en nuestro universo visual, la forma de las piezas y la manera de pegarlas contienen toda la información topológica de la forma del espacio.

La esfera tridimensional puede partirse en dos hemisferios que aplanados se ven como bolas sólidas en el espacio euclidiano, de modo que la esfera tridimensional tiene la forma topológica de dos bolas de cristal sólidas unidas completamente por el borde. Aunque en el espacio euclidiano no hay suficiente lugar para unir las, podemos imaginar que están unidas virtualmente y pensar que si nos moviéramos dentro de una de ellas y llegáramos a la orilla, pasaríamos sin notarlo a la otra bola.

Si tomamos un cubo de cristal sólido y unimos sus caras opuestas (de manera análoga a como se hizo con el toro), obtenemos el *toro tridimensional*. Igual que antes, éste sólo puede armarse en el espacio euclidiano de manera virtual y hay que imaginar entonces que al salir por una cara del cubo uno entra sin notarlo por la cara opuesta. La propiedad más notable del toro tridimensional es que su curvatura es 0, a pesar de ser un espacio cerrado. Por lo tanto, aun si nuestro universo no tuviera ninguna curvatura, y valiera localmente la geometría euclidiana, no podríamos afirmar que fuera globalmente euclidiano, ni siquiera que fuera infinito.

Al cambiar la manera de pegar las caras del cubo se obtienen formas distintas de espacios cerrados, incluyendo la esfera tridimensional y el equivalente tridimensional de la botella de Klein, que es un espacio cerrado no orientable. Los espacios no orientables se ven tan comunes como los orientables pero, como sucede en dos dimensiones, un habitante de un universo no orientable que hiciera un largo viaje podría encontrar, al regresar, todo invertido, como si estuviera viendo a través de un espejo (para quienes lo recibieran, sería el viajero quien estaría al revés).

Aunque todos los espacios cerrados pueden armarse con rompecabezas de una sola pieza euclidiana, los rompecabezas tridimensionales han resultado mucho más difíciles de estudiar que los rompecabezas planos. Se da además la circunstancia de que, si bien se puede calcular la característica de Euler de un espacio cerrado, ésta siempre da 0, por lo que no sirve para distinguirlos.

Una infinidad de posibilidades

Lo que distingue a nuestro universo de todos los universos posibles es que el nuestro sí existe.

Alberto Barajas, parafraseando a Leibniz

Después de siglos de intentar argumentar lógicamente que el universo es infinito, ahora parece que los babilonios y

los egipcios no estaban totalmente perdidos: es muy probable que el universo que habitamos sea un universo cerrado. Aunque un candidato natural para la forma de nuestro universo es la esfera tridimensional, hay en realidad muchísimas formas posibles, ya que en principio podría tener la forma de cualquier espacio cerrado.

El universo visual de un observador en cualquier espacio, abierto o cerrado, sería igual al nuestro: un espacio topológicamente euclidiano, sin más distorsión aparente que la que veríamos en un cristal euclidiano de densidad no uniforme. Los indicios sobre la forma verdadera del espacio, en caso de haberlos, serían muy sutiles. Los rayos de luz en un espacio no euclidiano podrían seguir distintas trayectorias entre dos puntos, de modo que quizás podríamos ver dos o más imágenes distintas de un mismo objeto (el problema sería que la luz tuviera tiempo suficiente para recorrer las distintas trayectorias, lo que dependería del tamaño del espacio).

La riqueza de formas topológicas conocidas es inmensa; sin embargo, a pesar de los espectaculares avances en los últimos treinta años, aún no se sabe cuáles son todas las formas posibles como tampoco se sabe con seguridad cómo distinguirlas. Las formas más naturales son, desde luego, las de curvatura constante, en las que la visión sería exactamente igual desde cualquier punto y en cualquier dirección. Se sabe que hay precisamente 10 formas topológicas posibles de espacios cerrados de curvatura constante 0, en los que vale localmente la geometría euclidiana, y que hay una infinidad de espacios de curvatura constante positiva, en los que vale la geometría esférica de Riemann. Pero la colección más grande conocida, y que crece todos los días, está formada por los espacios de curvatura constante negativa, en los que vale la geometría hiperbólica de Lobachevsky y Bolyai.

Además de las tres geometrías de curvatura constante (esférica, hiperbólica y euclidiana), hay otras cinco geometrías tridimensionales que son homogéneas pero no isotrópicas: la visión depende de la dirección en que miremos, y esta distorsión de la visión no puede corregirse al moldear los espacios, ya que es una consecuencia de la forma topológica, que tiene direcciones preferentes. Una de las conjeturas más prometedoras en la topología de los espacios es la de la geometrización, que predice que a cada forma topológica cerrada debería corresponderle una forma geométrica natural, que sería una combinación de formas homogéneas, de modo que estas ocho geometrías bastarían para describir la forma de cualquier espacio, salvo deformaciones locales.

En el caso de que se llegara a demostrar la validez de la conjetura de la geometrización, se estaría muy cerca de conocer todas las formas topológicas posibles de espacios cerrados y también se sabría —al menos teóricamente— cómo reconocerlas, pues todas las formas básicas desconocidas serían hiperbólicas. El universo visual de un espacio de curvatura negativa es lo que se conoce en matemáticas como la *cubierta universal* del espacio, por lo que fijándose en todas las imágenes visibles de un mismo objeto es posible construir un rompecabezas del espacio, y a partir de éste se puede averiguar la forma del espacio.

El universo de las matemáticas

El campo de juego de las matemáticas es, en cierto sentido, mucho más grande que el de otras ciencias, ya que no está restringido a la realidad: los universos matemáticos pueden tener cualquier número de dimensiones (¡aun infinitas!). El carácter deductivo de las matemáticas hace que sus únicos límites sean la imaginación y las leyes de la lógica. Pero, ¿qué sentido tiene estudiar cosas que quizás no existen? El hecho de que las matemáticas sean independientes de la realidad les da el poder de adelantarse a ésta: las geometrías no euclidianas no sólo fueron desarrolladas mucho antes de que se sospechara que nuestro universo no es euclidiano, sino que fueron fundamentales para hacer este descubrimiento. Y en la actualidad, una de las teorías físicas en boga plantea que nuestro universo no tiene tres dimensiones, ni siquiera cuatro contando el tiempo, sino 10, seis de las cuales estarían tan estrechamente curvadas que no las podríamos ver... ♦

Lecturas recomendadas

- Bracho, Javier, *¿En qué espacio vivimos?*, FCE (Col. La ciencia desde México, núm. 77), México, 1989.
- Einstein, Albert, *La teoría especial y la teoría general de la relatividad*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- Hawking, Stephen, *Historia del tiempo ilustrada*, Crítica, Barcelona, 1996.
- Kasner, Edward y James R. Newman, *Matemáticas e imaginación*, Salvat, Barcelona, 1987.
- Poincaré, Henri, *La ciencia y la hipótesis*, Espasa Calpe, Madrid, 1963.

La matemática es un oficio que todos podemos aprender

ADOLFO SÁNCHEZ VALENZUELA

A la memoria de mi padre

Con el propósito de promover la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Guanajuato, he tenido ocasión de dar varias charlas a alumnos de bachillerato con la consigna de motivarlos para el estudio de esta ciencia. Entre las preguntas que hay que estar preparado para responder en una charla de ese tipo están las siguientes: ¿Qué hace un matemático? ¿Qué significa dedicarse profesionalmente a las matemáticas? ¿Cómo describiría un matemático su trabajo y cómo lo compararía con otros? Me he podido dar cuenta de que no es del todo sencillo pararse frente a un grupo de preparatorianos a hablar de la "asignatura tabú" y transmitir lo maravilloso y apasionante del tema. ¿Cómo puede uno explicarle a un alumno de preparatoria en qué consiste el trabajo de un matemático y hacerlo con absoluta transparencia y sencillez; sin intimidarlo, sin ahuyentarlo, sin provocar que desconecte sus sentidos del resto de su ser y terminar sólo viendo cómo asienta con la cabeza por mero compromiso? ¿Cómo hacer que él pueda llevarse una respuesta concreta y descriptiva de las preguntas planteadas? En pocas palabras: ¿cómo transmitir motivación?

Mi propósito en este ensayo es comparar la actividad de un matemático con otros quehaceres humanos; deseo establecer relaciones entre la matemática y la poesía, la carpintería, la música y la pintura. Trataré de evidenciar esas ideas hablando de artesanía y matemáticas; de estados de ánimo y conjeturas; de sentimientos y teoremas. Las principales posiciones que me propongo exponer (¿defender?) son las siguientes: 1) Que las matemáticas son un ofi-

cio que se puede aprender como la carpintería o la pintura. 2) Que hacer investigación científica dentro del terreno de la matemática es comparable, por un lado, al trabajo de un artesano en cuanto a la minuciosidad con la que hay que cuidar los detalles finos y, por otro, al de un poeta al escribir poesía o un músico al componer una sinfonía en cuanto a la creatividad. 3) Que definitivamente sí hay detrás de los enunciados de muchos teoremas una buena cantidad de sentimientos y pasiones profundas, o por lo menos, reflejos muy elocuentes de la personalidad de los —¿cómo les podríamos llamar?: ¿autores?, ¿compositores?, ¿demostradores?— ¿descubridores? de dichos teoremas.

En 1973, cuando cursaba el segundo año de la preparatoria, acudí por recomendación de Memo Portillo, mi mejor amigo de la prepa, a una institución de la Ciudad de México dedicada a hacer exámenes de orientación vocacional. Había que someterse a varias pruebas psicométricas durante tres días consecutivos y esperar unos más para conocer los resultados en una entrevista con la psicóloga del programa. El día que fui por mis resultados iba confiado en que me dirían lo que yo quería escuchar. En ese entonces pensaba dedicarme a la ingeniería civil; de hecho, ya tenía trazado un futuro como ingeniero. Mi padre (ingeniero civil) me había conseguido un trabajo de dibujante en la empresa Ingenieros Civiles Asociados. Pero aquel día la psicóloga me dijo que los tests habían puesto de manifiesto que yo no tenía aptitudes para carrera alguna que tuviera que ver con las matemáticas. Que yo podía ser un abogado, o un

trabajador social, o un psicólogo; que definitivamente yo debía emprender una carrera humanística, aunque no precisamente —dijo— letras ni filosofía. “¿Podría ser músico?”, pensé tímidamente dándome por derrotado en ese instante para la ingeniería. Pero recuperé el aliento como pude y le dije que eso no podía ser. Alegué que quien explicaba los problemas de matemáticas a mis compañeros de la prepa era yo y que mis calificaciones en esa materia habían sido excelentes toda la vida. La psicóloga me sugirió entonces que me sometiera a una serie de pruebas adicionales para estar seguros.

Salí destrozado de ese lugar. “¿Cómo podía ser posible?”, me preguntaba. A Memo le habían resultado muy provechosos esos mismos exámenes y le habían dicho que iba sobre el camino correcto: la música. A mí, en cambio, me estaban diciendo que iba tras la carrera equivocada y, además, el viraje que había que hacer para estar en armonía con mis aptitudes era de ciento ochenta grados. No sé de dónde saqué valor para presentarme a resolver aquellos tests especiales de matemáticas, pero justo después de la primera prueba ya no tuve coraje alguno para ir a los siguientes. Uno sabe cuando sale mal en un examen, y en aquel primero yo sentí que mi desempeño había sido bastante mediocre. Casi todas las preguntas se hacían contra reloj y yo no tuve tiempo suficiente para contestar ninguna de ellas. Ya no volví jamás a aquel lugar y preferí no darme permiso de escuchar el final de esa historia por boca de la psicóloga.

Al poco tiempo me encontraba, junto con Memo, haciendo un examen de admisión para ingresar a la Escuela Nacional de Música. Para prepararlo tuvimos que empezar por aprender un poco de solfeo. Ninguno de los dos sabíamos leer las notas en un pentagrama. Un amigo de la secundaria que tocaba el violín desde niño nos preparó para el examen introduciéndonos en el fascinante mundo del solfeo. Días después me llamó Memo muy emocionado para decirme que había ido a buscar los resultados del examen de admisión y que él había sido admitido para estudiar flauta. Sin embargo, me dijo también, con cierto pesar, que yo había sido rechazado.

En el tercer año de la preparatoria decreté para mis adentros que los psicólogos se habían equivocado: mi futuro sí era la ingeniería y yo debía apuntar mi vida directo hacia allá. Pero un buen día, nuestro profesor de física, Mario Cruz Terán, se salió del guión en su clase y se puso a hablar sobre la paradoja de los gemelos planteada por la teoría de la relatividad de Einstein. Aquella sola clase fue un detonante para mí. “¡Eso es lo que yo quiero estudiar!”, me dije. ¡Ciencia!

¡Física! Y en aquel momento decidí interrumpir el camino hacia la ingeniería y emprender uno completamente nuevo y, quizá ahora sí, propio.

En 1975 ingresé a la Facultad de Ciencias de la UNAM para estudiar la carrera de física. Ahí tuve oportunidad de ver cómo casi todos mis compañeros hablaban con mucha propiedad y facilidad acerca de los conceptos de la física. Ahí entendí por primera vez el significado de la palabra vocación. El primer amigo que tuve en la facultad fue Ernesto Rivera, quien podía resolver con un ingenio enorme *todos* los problemas que nos planteaban en el curso de física general del primer semestre. Un día el profesor le pidió que pasara al pizarrón para que nos explicara cómo es que él había conseguido resolver cierto problema de gravitación. Ernesto escribió con soltura y rapidez sobre el pizarrón y al cabo de muy poco tiempo el maestro lo detuvo diciéndole “¡momento que soy lento!” Ernesto era sin duda brillante y talentoso, pero estuvo menos de un año en la Facultad de Ciencias; consiguió una beca y prefirió irse a estudiar a Alemania.

Una aptitud semejante la encontré en otro amigo entrañable: Gustavo Espinosa. En el segundo semestre de la carrera llevamos un curso de mecánica clásica donde debíamos resolver problemas cada semana; él podía bosquejar la solución en su cabeza —sin tener la necesidad de escribir las ecuaciones!— mientras hilaba varias carambolas en la mesa de billar que tenía en su casa. Yo me pasaba la mayor parte del tiempo sentado por un lado de la mesa anotando lo que Gustavo decía acerca de la solución de los problemas. Para ello tenía un cuaderno que en lugar de *Mecánica* debió decir en la portada *Gustavo*; era el cuaderno que siempre llevaba a su casa cuando él y yo jugábamos billar. Tras tomar nota, yo trataba de concretar los detalles, resolver las ecuaciones y poner todo en orden, pero lo impresionante era que los problemas salían como las carambolas: por donde Gustavo los veía y como él decía que iba a ser el resultado.

Años más adelante, para mi gran fortuna fui admitido en el doctorado en el departamento de matemáticas de Harvard y ahí me encontré con muchos chicos como Ernesto y Gustavo: con matemática dentro de su DNA, con gran habilidad para resolver problemas, con mucho ingenio para demostrar proposiciones, con gran aplomo para sostener discusiones con los profesores, con una enorme capacidad para argumentar y exponer con soltura sus ideas y con la claridad necesaria para transmitir las “imágenes” formadas en sus cerebros aun tratándose de conceptos sumamente abstractos. ¡Sí!, en Harvard había muchos estudiantes que eran así.

* * *

Hoy me digo a mí mismo que lo que tenían en común todos ellos era el brillo de emoción en sus rostros al hablar de física o de matemáticas. Los problemas de tareas nunca los padecían, no se sentían jamás agobiados por ellos, sino todo lo contrario: los disfrutaban y gozaban al máximo. Por lo demás, pienso que casi todos (y la única razón por la que no digo *todos* es por culpa de uno o dos *virtuosos* que vi pasar), eran personas completamente normales. Por ejemplo, los amigos que mencioné tenían y padecían problemas personales normales, diría yo, de los que todos tenemos; provenían de familias más o menos comunes y corrientes para los estándares de los estudiantes universitarios; eran gente igual a toda la gente y lo único que sucedió en el caso de cada uno de ellos fue que desde antes de ingresar a la facultad ya habían leído, estudiado, practicado, indagado, etcétera, algunos temas de matemáticas y física. ¿Por qué tenían este cúmulo de experiencias previas? Quizá sólo porque les gustó, fue algo que reconocieron para sí mismos y tuvieron la voluntad de estudiar y aprender antes de entrar a una facultad. Lo hicieron quizá desde que eran niños y conjeturo que la característica común y fundamental fue que nunca eludieron el desafío que les imponía un problema e intentaban, por ello mismo, darle solución.

¿Pero no es acaso esto muy similar a lo que sucede con los chicos que estudian música o pintura? Hay padres que llevan a sus hijos a recibir clases de piano desde que éstos son muy pequeños. Y entonces, el ejecutar una obra al piano, el desarrollar gusto y sensibilidad por la música, el aprender a leer las notas, etcétera, son habilidades que, por haber sido estimuladas intensamente con método y disciplina desde una edad temprana, se manifiestan más adelante ante los ojos de quienes no tuvieron este tipo de formación como un *talento especial*. ¿Cuántos niños tienen la oportunidad de tomar clases de música? (Piénsese también en las clases de inglés y de natación, que son tan populares.) Y a manera de contraste, ¿cuántos niños experimentan una estimulación temprana para el estudio de las ciencias y en qué casos ésta ha sido fomentada por sus padres? Hace muchos años conocí a un niño que me decía con mucha desesperación y frustración que él no entendía por qué a sus padres no les gustaba que él aprendiera cosas interesantes, por lo que yo le pregunté: “¿por qué piensas que ellos no quieren que tú aprendas cosas interesantes?”; me respondió que debido a que a él le gustaba pedir como regalo de cumpleaños, o de Navidad, libros; en particular, ¡libros de paleontología, de avio-

nes, de astronomía! y lo que le decían sus padres era: “¿para qué quieres tener tantos libros?”

Afortunadamente, la voluntad del niño fue lo suficientemente grande para satisfacer su deseo de aprender y de leer los libros que quería. Sin embargo, no puedo dejar de notar la gran diferencia que hay entre este chico, cuyo padre podría equipararse a Homero Simpson, y, digamos, Richard Feynman (Premio Nobel de física en 1965), cuando era niño, quien, en una entrevista que concedió para la televisión pública de los Estados Unidos al inicio de la década de los ochentas, contó que su padre le leía muchos libros de ciencia desde que él era muy pequeño y que además lo hizo con gran sabiduría porque le enseñó a comparar unas cosas con otras y a entender el significado de los números. El ejemplo que daba era que cuando su padre leía en un libro que el Tiranosaurio Rex medía hasta seis metros de altura, éste hacía una pausa y le preguntaba a su hijo: “¿Sabes lo que esto significa? Significa que si el animal estuviera parado aquí en el jardín y te asomaras por esta ventana del segundo piso tendrías aún que voltear un poco más hacia arriba para ver hasta dónde llega y comprobarías que su cabeza está un poco más arriba que la chimenea.” Hasta donde recuerdo de aquella entrevista y hasta donde recuerdo de su libro (*Surely You're Joking Mr. Feynman!*), él no menciona haber tomado clases de piano, ni de natación, ni de pintura. Sólo recuerdo haberlo visto en la televisión hablar muy emocionado de ciencia y de las cosas que su padre le enseñó respecto de ella. Con estos antecedentes, ¿nos puede sorprender mucho que Feynman haya recibido el Premio Nobel de física?

* * *

Imaginemos una fiesta de jóvenes bachilleres: hay música muyailable, ruido, risas, relajo y buen ambiente. Por allá en un rincón hay un chico que se ve un poco tímido frente a una linda muchacha que comienza a hacerle plática: “¿Y a ti qué materia te gusta más?”, pregunta la chica, y él responde: “Matemáticas...” (no debe costarnos trabajo imaginar el brillo de sus ojos al responder). “¡Uy! ¡Has de ser un geniecito!, ¿no? Y ¿qué quieres estudiar después?” “¡Matemáticas!”, responde nuevamente él. “¡Qué padre!”, dice la chica con un tono que marca de facto el fin de la conversación. Se produce un gran silencio (el típico silencio después del típico tono de exclamación) y la chica dice: “Bueno, yo quiero bailar. ¡Nos vemos después!, ¿eh?”, y se va a buscar con quien bailar aunque en realidad parece huir. Esta historia es típica. Es muy posible que al chico le gustara bailar y

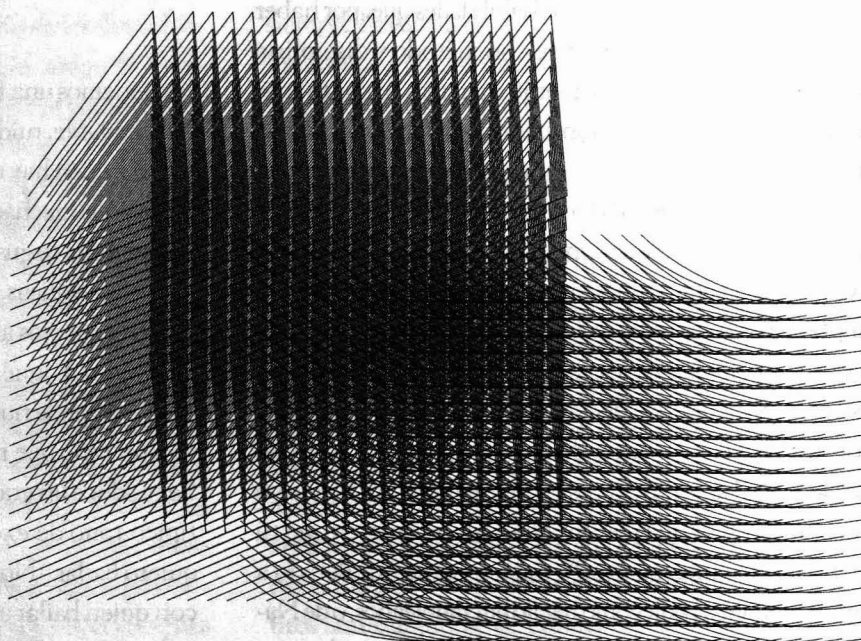
que sólo estuviera esperando una oportunidad para hacerlo. Él habría bailado gustoso con ella, pero la conversación tomó demasiado pronto un rumbo muy escabroso. Podían haber platicado de muchas otras cosas, pero... ¿Por qué es tan complicado continuar una conversación que ha empezado así? ¿Por qué es tan raro que a alguien le gusten las matemáticas? ¡A uno le pueden gustar y no saber nada de ellas! Es como cuando nos gusta la música y no sabemos gran cosa de ella. No es difícil imaginar que, en la misma fiesta, la chica que abandonó en el rincón al “matemátiquito” se incorpore a un grupo donde alguien habla sobre la discografía de un grupo de rock muy popular y de pronto alguien más hace el comentario de que la pieza fulana está inspirada en uno de los conciertos de Brandemburgo de J. S. Bach. Y entonces la plática se orienta hacia Bach y luego hacia la música clásica y alguien en el grupo puede decir que la música clásica le fascina, que siempre sintoniza la estación de radio de música clásica en su automóvil. ¿Por qué no podemos hablar igual —con la misma soltura y con la misma ligereza— acerca de las matemáticas? ¿Cuál sería una manifestación análoga en el contexto de la fiesta que imaginamos? Quizá que justo cuando la chica hizo la pregunta “¿Y a ti, qué materia te gusta más?” y se oyera por respuesta “las matemáticas”, alguien que pasara cerca dijera con emoción: “¡Ah! a mí también me encantan las matemáticas. Yo siempre compro la revista *Muy Interesante* sólo para leer la sección ‘El rincón del teorema’.”

En la misma fiesta podemos imaginar a otro grupo de chicos y chicas hojeando un libro con fotografías del Louvre con el que se toparon en un librero de la casa. Y al mirar las fotografías de un libro así están a la merced de sus sentidos; como al leer un poema. ¿Como al mirar las ecuaciones de un libro de matemáticas? Hay pinturas que nos conmueven, hay poemas que nos emocionan y hay símbolos matemáticos y ecuaciones que nos seducen e invitan a entender de lo que tratan.

Dentro de la matemática hay varios géneros: álgebra, análisis, geometría, computación, estadística, etcétera. Al hojear (y ojear) un libro de matemáticas uno puede sentirse atraído o repelido por la sola apariencia de las ecuaciones que en él se en-

cuentran. Muchas veces he tenido alumnos que no tienen muy claro cuál tema de entre los varios que conforman la matemática les gusta más, como para embarcarse en la aventura de escribir una tesis de licenciatura, y lo que hago es “recetarles” una lista de varios libros con la “prescripción” de que los hojeen y se dejen seducir o tomen distancia por la sola apariencia de las ecuaciones: “¿Con qué clase de ecuaciones quieren estar trabajando?”, les pregunto. Y hasta he recomendado literalmente mirar esos libros como si fueran libros de arte. Lo que intento con ello es apelar a un cierto gusto y a una cierta preferencia, que después de muy poco tiempo sí se desarrolla en un aprendiz de la matemática (¡como en un aprendiz de lo que sea!). ¿Podría ser comparable —en cuanto a sensualidad— a los gustos y preferencias de una persona que lo llevarían a sentirse atraído por ciertas características de otra y buscar su compañía, hacer el amor, compartir una vida? En realidad lo que busco con esa prescripción es que los alumnos *sientan* el “flechazo”.

Aunque tratemos de ver las cosas con lógica, con rigor, con método, con objetividad, y aunque le tratemos de dar una demostración a todas nuestras proposiciones, los matemáticos también tenemos intuición, sensaciones y corazonadas. Tenemos un corazón que se puede romper, un corazón que a menudo no entiende las razones de la razón. Con toda la lógica y el rigor del mundo, el corazón nos puede explotar



para destrozarse en mil pedazos cuando ya no le cabe ni una sola gota más de tristeza, o desconcierto, o aflicción; o puede latir con profunda emoción cuando alguien lo acaricia con bellas palabras, con sentimientos profundos y conmovedores. Sus fibras pueden vibrar y resonar en armonía cuando puede hablar con alguien que habla el mismo lenguaje. Por ejemplo, cuando habla de amor, o cuando habla de matemáticas. ¡Cierto! Son tipos de vibración muy distintos, pero son vibraciones bellas. Es como cuando un saxofonista, un flautista, un baterista y un pianista se emocionan hasta el éxtasis al improvisar juntos y abundar sobre un tema o idea musical; es como cuando en una tertulia literaria nuestros amigos lloran, ríen y se emocionan mientras leen los cuentos o poemas o fragmentos de ensayos y novelas que han escrito. El común denominador es que en estas situaciones se habla, se entiende y se pueden comunicar ideas con un mismo lenguaje.

En la matemática hay alfabetos y reglas gramaticales que se pueden aprender. El conocimiento del lenguaje persigue un fin: dominar la comunicación y esto, en sí, representa la solución a muchos problemas inmediatos, entre otras cosas, porque sabemos pedir lo que necesitamos. En el amor se aprende a pedir lo que se necesita, en la ejecución musical se aprende a pedir *la primera voz*, en la poesía se aprende a comunicar una idea o una emoción, en la matemática se aprende a pedir o a dar una demostración. Pero hay otros usos del lenguaje. Quizá el ejemplo con el que estemos más familiarizados sea el del lenguaje escrito: ahí existe la poesía. La poesía inventa, compone, impacta nuestros sentidos y nos produce emociones. La poesía crea un mundo que es tangible sólo desde dentro del universo poético que ella misma ha generado. ¿No es acaso como la matemática? La matemática también inventa, compone e impresiona y muchas de sus realidades son tangibles sólo desde dentro de un universo ad hoc. Ante esta comparación se puede argumentar que la matemática está sujeta a una estructura muy rígida y que sus razonamientos están soldados a una estructura inamovible, pero ¿acaso no se puede decir lo mismo de la poesía? La poesía misma, con todo y su frescura y su libertad, también tiene estructuras, también obedece a sus “propias leyes” (*eg, not law at all!*), también tiene una historia y una teoría—como la tienen la música, la pintura y la carpintería.

Los matemáticos han usado la lógica como la infraestructura principal que subyace tras todas sus teorías. Pero incluso la lógica misma ha sido estudiada desde el punto de vista riguroso de la matemática. Los matemáticos se han

dado cuenta de que existen “otras lógicas”, de la misma manera que en el siglo pasado se reconoció que eran posibles “otras geometrías” diferentes a la de Euclides. ¿Cómo explicarle al no versado qué quiere decir que hay “otras lógicas”? ¡Hay que darle un ejemplo concreto! Y lo que viene a la mente es señalar una de las diferencias fundamentales entre una lógica y la otra: en la lógica a la que estamos acostumbrados se pueden distribuir los conectivos y y o, como en la siguiente proposición:

$$A \text{ y } (B \text{ o } C) = (A \text{ y } B) \text{ o } (A \text{ y } C)$$

Esto dice que, lógicamente, la proposición del lado izquierdo es la misma que la del lado derecho. Por ejemplo:

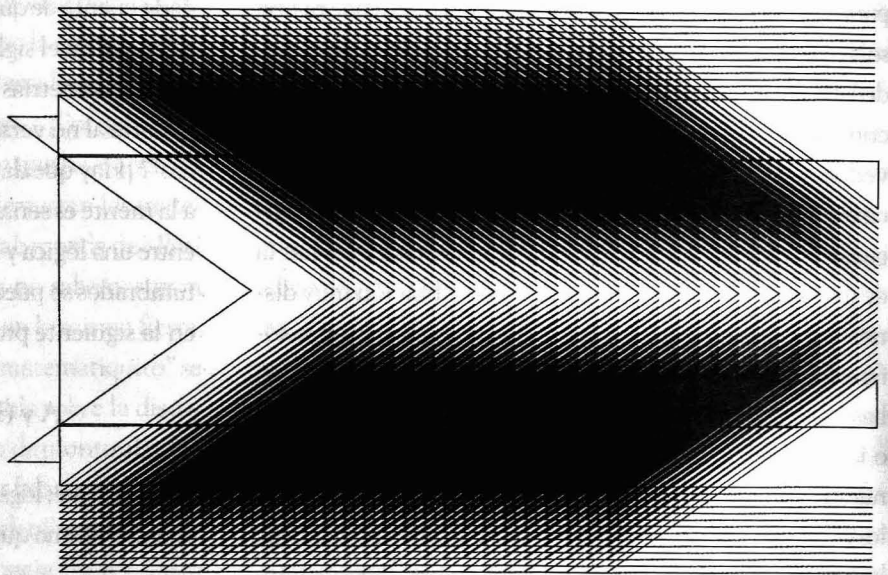
$$\text{Salud y (Dinero o Amor)} = (\text{Salud y Dinero}) \text{ o } (\text{Salud y Amor})$$

Sin embargo, las reglas de la lógica cuántica no permiten, en general, establecer una equivalencia entre estas dos proposiciones y sólo se puede afirmar lo siguiente: Si Dinero implica Salud, o si Amor implica Salud, entonces las proposiciones “Salud y (Dinero o Amor)” y “(Salud y Dinero) o (Salud y Amor)” son lógicamente equivalentes.

Nos preguntamos, entonces si, apreciar estas exquisiteces es semejante a apreciar la poesía o la música o la pintura. Imaginemos a un músico que va leyendo la partitura de una sinfonía al tiempo que va escuchando una grabación de la misma. Y detiene la cinta en algún pasaje que le conmueve muchísimo y lo repite... y lo repite... ¿no es como cuando leemos un poema y volvemos a leer y cada vez parece que entendemos mejor el mensaje del poeta?, ¿no es como cuando regresamos sobre las líneas de la demostración en un teorema? ¡Casi nunca leemos poesía ni matemáticas “de corridito”! De manera semejante, ir a una conferencia de matemáticas podría ser como ir a un concierto. Podríamos no toser ni interrumpir. Podríamos sólo escuchar atónitos, emocionados, pero cuidándonos de no hacer preguntas sino hasta el final porque así lo pidió el conferencista. Pero hay conferencias que, al contrario, pueden ser interrumpidas y admiten una interacción más inmediata. Es claro que interactuar directamente con el conferenciante, en la analogía del concierto, sería como detener al director para que repita un trozo de la ejecución y volver a entender o apreciar lo que hay en el fondo de un pasaje de la sinfonía que interpreta. La música fluiría en un concierto, pero no así si la estamos trabajando o si estamos sintiendo su estruc-

tura desde la plataforma de un compositor o de un crítico. Lo mismo sucede cuando estamos tratando de entender las emociones y sentimientos que nos trata de comunicar un poeta cuando leemos poesía... y lo mismo ocurre al hacer el amor cuando lo entregamos y lo recibimos en la más delicada y sublime armonía. Y es que cuando la interacción es intensa y uno está metido de lleno en ella, cuando uno quiere entender, apreciar, componer, aportar, etcétera, la obra debe detenerse, el pasaje debe repetirse, debe repasarse... y hay pasajes donde se puede dejar fluir y uno puede sólo sentir y emocionarse libremente. Y hay otros donde nuestra aportación es importante para entender, para sentir mejor, para apreciar mejor y hay entonces un éxtasis, como al leer un poema, al escuchar un pasaje musical, al sentirse conmovido por tanto amor y, ¿por qué no?, al ver finalmente demostrado un teorema tras el que hemos ido durante una buena parte de nuestra vida.

¿Y cómo fue que usted llegó a Harvard?, me preguntó un chico de preparatoria en una de las conferencias que mencioné. Después de que algunos de sus compañeros presentes exclamaran “¡en avión!” y tuvimos un espacio para reírnos un poco, contesté que por una gran fortuna. Es cierto: durante mis estudios de licenciatura en física siempre me sentí muy obligado a no dejar de estudiar intensamente porque desde que ingresé a la facultad me di cuenta de mi enorme desventaja en lo que a aptitudes se refiere. Honestamente, quería estar a la altura de mis amigos. No estar en ese nivel me parecía, simplemente, no estar haciéndolo bien. Debo reconocer que mi desempeño en los primeros exámenes de la facultad, sobre todo los de los cursos elementales de matemáticas, evidenciaba un entendimiento bastante mediocre de los conceptos. En los primeros semestres de la carrera, en el primer examen de cada curso, casi siempre salía muy mal. Lo que sí sucedía después era que trataba de superarlo y al final siempre conseguía buena calificación. Conforme fui avanzando en la licenciatura desarrollé un gusto por la teoría de la relatividad y fui aprendiendo todo lo que podía para entenderla mejor. Mis intereses se orientaron entonces



hacia la geometría diferencial, con el único propósito de comprender la teoría relativista de la gravitación. Tuve dos profesores cuyos cursos de geometría diferencial me marcaron fuertemente: Charles Boyer y Héctor Vázquez Briones. Hubo también dos libros muy importantes en esa época con los que yo me ayudaba y aprendía las lecciones de geometría diferencial: *Advanced Calculus*, de L. Loomis y S. Sternberg, y *Lectures on Differential Geometry*, de S. Sternberg, ambos escritos por profesores del departamento de matemáticas de Harvard. Hacia el final de la licenciatura yo no soñaba siquiera que algún día estaría cursando la materia de análisis funcional con Lynn Loomis ni que estaría escribiendo una tesis doctoral bajo la supervisión de Shlomo Sternberg. Lo único que me pasaba por la cabeza entre 1978 y 1979 era aprender geometría diferencial para comprender la gravitación y tratar de conectarme cuanto antes con Jerzy Plebanski, quien era, en ese momento, uno de los personajes más famosos con quien uno podía doctorarse en México fructíferamente dentro del singular tema.

En este estadio concluí la licenciatura en física realizando una tesis de geometría diferencial (dirigida por Charles Boyer) y me inscribí casi inmediatamente en la maestría en física. Para entonces, yo ya había llevado más cursos de geometría diferencial y de relatividad con Plebanski y me había convencido de que tenía que reforzar mi preparación matemática. En algún momento me cruzó por la cabeza la idea de estudiar un doctorado en matemáticas, pero sólo para ser después un físico teórico “mejor preparado”. Escribí a Harvard y seguramente las cartas de recomendación que redactaron mis profesores fueron generosísimas porque fui admitido sin problemas.

Mi llegada a Harvard fue como tenía que ser: arrogante. Llegué comiéndome al mundo y pensando que lo que vendría por delante sería "cuesta abajo" porque ya tenía bajo el brazo un doctorado en física casi concluido. ¿Qué resistencia podían ofrecerme los matemáticos? ¡Toda la resistencia del mundo!, hecho que no me costó trabajo comprobar al cabo de la primera semana de clases. Por un lado, casi todos los estudiantes que uno se encuentra por ahí han sido durante algún tiempo "el estudiante número uno" en las escuelas de las que provienen. Es claro que en un salón con veinticuatro estudiantes de éstos, uno de ellos tendrá que ser el número veinticuatro y que eso no será fácil. Yo de plano fui el cabús durante mucho tiempo. Era evidente que me había hecho falta cursar las materias básicas de matemáticas de la licenciatura con el espíritu de un matemático y no con el de un físico para tener un mejor desempeño al llegar a Harvard. Y es que, a veces, los "argumentos físicos" que uno puede usar para evidenciar alguna afirmación de la física teórica no se parecen en nada a las demostraciones que los matemáticos están acostumbrados a dar a sus teoremas. Mis "demostraciones" rápidamente me pusieron en evidencia en el curso de álgebra al que me inscribí en el primer semestre en calidad de aspirante al doctorado; después de mi segunda tarea, el profesor me sugirió que mejor me inscribiera al curso básico de álgebra (¡el curso para los *undergraduates*!) porque el suyo obviamente me estaba quedando grande. O sea que no sólo estaba siendo el cabús de mi clase, sino que de plano me cortaban por incapaz y me arrojaban al curso elemental. Ése fue mi *welcome to Harvard, my friend!*

El golpe al orgullo fue duro otra vez, pero hoy me siento muy contento por haber sabido tomar la lección con humildad, por haber reconocido que me faltaban las bases y que éstas uno las puede aprender. Creo que lo más afortunado de aquellos días difíciles en los que perdí tan de golpe mis asumidas seguridad y confianza fue: 1) haber asistido al curso de los *undergraduates* aceptando que ése era precisamente mi nivel y que tenía que aprender "desde cero" y 2) haber estado con mi esposa Tatiana quien, en los momentos en los que yo más me desesperaba y me cuestionaba seriamente qué demonios estaba haciendo allí, estuvo a mi lado para recordarme los argumentos y motivos correctos y no dejarme claudicar.

Hacia la segunda mitad del segundo año, habiendo aprobado los muy temidos exámenes generales, hablé con el buen Shlomo para que me dirigiera una tesis; a partir del momento en el que me dio su "¡sí, acepto!", conocí facetas de mí mismo que ni sospechaba que existieran y tam-

bién los encantos y frustraciones de la investigación científica. Y otra vez, hoy, me siento muy afortunado de haber sido conducido a lo largo de mi trabajo de tesis doctoral por un personaje como Sternberg. Sin duda, en su momento fue duro aguantarle el paso, pero estoy convencido de que él, más que nadie, fue quien me formó como matemático; además de que siempre me trató como a un colaborador, me enseñó con su ejemplo a confiar en mi trabajo. Discutíamos a todas horas; nos desesperábamos juntos cuando los resultados no salían. Un día, cuando recién comenzaba a trabajar bajo su dirección, nos encontrábamos "prendidos de la greña" frente a un pizarrón reconociendo que no entendíamos lo que estábamos viendo; en ese momento pasaba por ahí don Raoul Bott y preguntó qué nos sucedía. Sternberg le contestó algo del estilo de "*we don't understand this shit!*", a lo que don Raoul contestó: "*If your student can't help you, who can?*" A partir de ese momento supe que se esperaba mucho más de mí y en verdad siento que encaminé mi esfuerzo a satisfacer las demandas de mi asesor. Ciertamente siempre me sentí con la responsabilidad de darle respuesta a sus preguntas y de avanzar en la dirección en la que él sugería. En el proceso aprendí que uno puede hacer cálculos complicados, conjeturar resultados e ir tras ellos y sus demostraciones y que, después de algunas semanas y varios kilos de papel apilado (pero organizado), las cosas pueden no ir bien; entonces hay que tirar todo ese papel y regresar al principio y estudiar el problema de manera diferente. Cuesta mucho trabajo deshacerse de todo ese papel, y la razón es que ésa puede constituir la única prueba tangible de que se ha trabajado duro; pero si las cosas van mal, simplemente van mal y hay que volver para tomar otro camino. La ciencia es así y en particular la matemática.

* * *

Conforme han pasado los años he ido apreciando mucho más el trabajo que Shlomo hizo conmigo como estudiante y le he agradecido infinitamente el haberme dejado conocer y sentir tan de cerca lo que hoy entiendo como la verdadera esencia del quehacer científico en matemáticas. Hoy lo veo así: el descubrimiento científico es un producto de la interacción humana. Los matemáticos, por ejemplo, llegan a conjeturar sus resultados y teoremas luego de muchas discusiones, de horas en seminarios, de demostraciones fallidas, etcétera, pero, ante todo, lo verdaderamente importante en el camino que conduce a un descubrimiento científico, por modesto que éste sea, es la comunicación oral.

Los artículos donde se reportan los descubrimientos científicos varían en cuanto al estilo de ciencia a ciencia. En matemáticas la gran mayoría de los artículos son muy áridos. El "reportaje matemático" ha de ser riguroso y estricto. Idealmente no se debe "despeinar ni un sólo pelo" en ninguna demostración. Pero entonces, con esta manera tan lógica y tan depurada de reportar un resultado se pierde el sabor de lo que generó las ideas. Se pierden también los andamios que se pusieron para soportar la estructura de las demostraciones. Se pierde mucho del estilo artesanal de la matemática y al final sólo queda un edificio sólido pero sin adornos y sin vestigios de las motivaciones que condujeron la investigación precisamente por el camino por el que se llevó. De ahí que la metodología del matemático descansa muy fuertemente en su asistencia a seminarios y en invitaciones a dichos seminarios a los autores de los teoremas sobre los que está descansando su investigación del momento. La razón fundamental de tener al fulano enfrente es poder preguntarle: ¿Por qué su artículo quedó como quedó y por qué las demostraciones han quedado como quedaron?

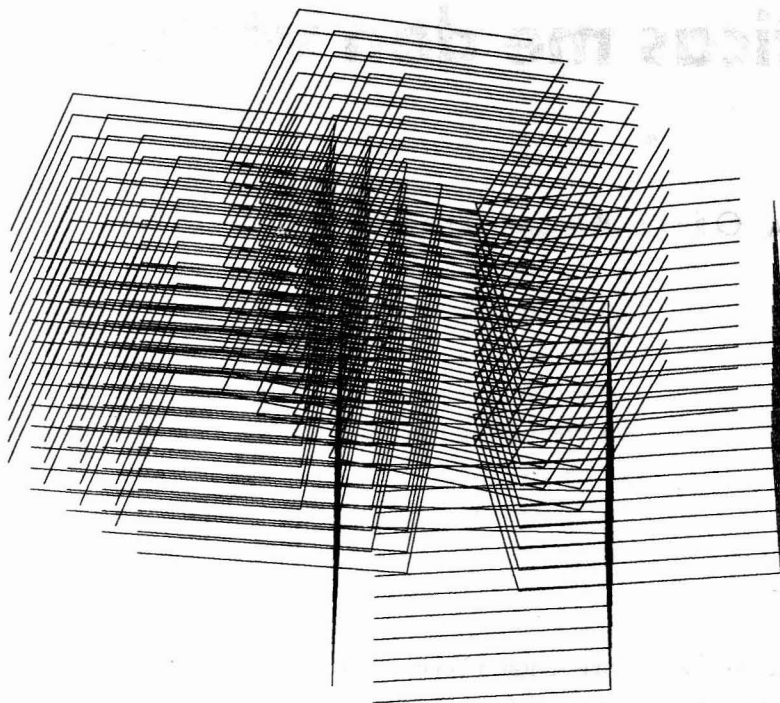
También es cierto que una parte importante del entendimiento matemático se consigue estando a solas. Casi siempre la versión final de una demostración se logra después de comenzar a escribir con sumo cuidado todos los detalles, y aun así, casi nunca queda perfectamente "bien sellada" en los primeros intentos. Muchas veces hay que pulir cuidadosamente los argumentos y limpiar con esmero los detalles. A pesar de que se puede estar casi seguro de la validez del teorema, uno no experimenta completa felicidad hasta que de verdad la demostración ha sido herméticamente cerrada y acabada.

Se puede caricaturizar al matemático como un tipo al que se le ve por los pasillos del instituto o de la facultad caminando un poco cabizbajo. Si uno se acerca a preguntarle qué es lo que le aflige tanto, él responderá sencillamente que no termina de salir la demostración de su teorema. Pero un buen día, después de tantos seminarios y discusiones e intentos de limpiar su investigación, se va a la cama y no puede dormir porque le comienza a revolotear una idea acerca de cómo puede conseguir que la demostración funcione bien. Se levanta de la cama y aunque la idea era sólo un espejismo, como en la mayoría de estos casos, habrá una noche en la que sí, todo funciona, todo sale bien, todo se entiende perfectamente, todo cae por su propio peso en su lugar y se organiza casi por sí sola la estructura de la presentación final. El investigador se siente feliz y se siente mon-

tado en la cima del universo. La adrenalina corre por su cuerpo y cada linfocito de su ser se ve invadido por la droga del descubrimiento que acaba de hacer. Se olvida de la hora que es. No tiene sueño, no tiene hambre y sólo tiene ese impulso grande por terminar de escribir en limpio todos los detalles del artículo. Ridículamente piensa en ese momento que alguien en el mundo puede adelantarse en la demostración. Se pasa la noche en vela escribiendo el *paper* y como no puede esperar, se va a su oficina a imprimir la versión final y lo deja, con el primer rayo de sol, dentro de un sobre rotulado, sobre el escritorio de la secretaria, con una nota donde le pide enviarlo por mensajería cuanto antes y él se va, entonces sí, a dormir. Al día siguiente se le vuelve a ver preocupado y cabizbajo porque ahora anda en busca de un nuevo teorema qué demostrar. Parecería una vida un poco aburrida ante los ojos de quien no ha sentido esa droga de la "noche anterior", pero una sola noche de éstas al año vale por todo el año para alimentar al espíritu del matemático que todos llevamos dentro.

Desde cierto punto de vista, esta caricatura es más o menos aplicable a casi todos los matemáticos. Sin embargo, el matiz o "personalidad de los resultados" demostrados es una cosa un poco aparte. No puedo dejar de mencionar que hay teoremas pesimistas y teoremas optimistas. Hay teoremas importantes —normalmente contraejemplos— que dicen: "no existe X alguno para el que..." o "la construcción Y no se puede realizar...". Me aventuro a catalogar éstos como resultados pesimistas, que casi siempre reflejan un poco el carácter del matemático que los demostró o descubrió. También los hay del tipo optimista, que, por ejemplo, dicen: "para cada Z existe un único W tal que..." Quizá cueste trabajo pensar que un artículo sobre matemáticas presente matices personales dentro de los crípticos enunciados de sus proposiciones y teoremas, pero yo, mientras más artículos veo, más me convenzo de que pueden decir muchas cosas acerca de la personalidad del autor. Los hay osados, arrogantes, tímidos, mojigatos, etcétera. He aquí un ejemplo de una idea osada y optimista:

La *supersimetría*. El lema de Schur dice que es imposible establecer una transformación lineal equivariante diferente de cero entre dos espacios vectoriales donde un grupo actúa irreduciblemente. En la física existen dos tipos muy diferentes de partículas elementales: los bosones y los fermiones. Cada tipo de partícula elemental se entiende, desde el punto de vista de la matemática, como un vector en un espacio donde el grupo de simetrías de la naturaleza actúa irre-



duciblemente. La idea de la supersimetría es hacer posible la existencia de transformaciones distintas de cero, equivariantes, entre espacios vectoriales distintos donde el grupo actúa irreduciblemente. Luego, el escenario donde está planteado el lema de Schur resulta estrecho. El nuevo resultado podrá ser posible sólo sobre bases completamente distintas.

* * *

Cuando pensamos parece ser que lo hacemos con palabras. Las palabras son manifestaciones de nuestras ideas y la matemática ha de transmitirse con palabras, las del idioma que hablamos todos y otras más: las del idioma matemático; éstas son las que tenemos que aprender para saber de qué objetos hablamos. Pero dado que un tema central de este ensayo ha sido la comunicación de ideas y emociones, quisiera terminar con un par de reflexiones acerca de la comunicación del pensamiento; en particular, el texto entero podría juzgarse e iluminarse bajo la luz de los siguientes argumentos: si el pensamiento son palabras, uno puede valerse del lenguaje escrito para comunicarlo. Por ejemplo, yo escribo para ordenar mis ideas —para “verlas” estáticas por un momento, aunque éste sea pequeñito—. Es como tomarles una fotografía. Pero las ideas se están moviendo constantemente. Recuerdo que hay fotos llamadas “instantáneas” y pienso que ese nombre describe y se apegas mejor a lo que quiero decir: si escribo para ordenar mis ideas, puede ser que éstas salgan en su forma “instantánea”, pero puede ser tam-

bién que salgan “muy movidas”, que no se vean bien y hasta pierdan totalmente su definición. En este caso, he tratado de mover algunas ideas en forma helicoidal alrededor de un eje central: ¿cómo motivar a los jóvenes para que abran sus ojos y que por lo menos consideren dentro del abanico de sus alternativas la posibilidad de estudiar alguna carrera científica como la matemática? El propósito era dar elementos de juicio y fundamentar las posiciones de que esto es un oficio muy comparable a muchos otros y que se puede aprender y llegar lejos. Pero ahora, en las postrimerías de este escrito tampoco puedo dejar de mencionar que un propósito más ambicioso sería tomar como pretexto las preguntas iniciales (¿qué hace un matemático?; ¿qué significa dedicarse a las matemáticas profesionalmente?; ¿cómo describiría un matemático

su trabajo y cómo lo compararía con otros trabajos?) y con base en ellas generar algo así como una declaración de principios respecto a la propia profesión. Sin embargo, la tarea de apuntar la brújula hacia la dirección ideal y darse argumentos y estrategias para avanzar sobre el camino planeado es una tarea muy íntima; es algo que cada uno debe hacer para sí mismo y puede no tener mucho sentido el esfuerzo de ponerse a escribir algo así para el público a la luz de la pregunta ¿por qué ha de hacerse pública una disertación sobre asuntos tan personales? Y como no tengo una respuesta razonable y sensata para esta pregunta, prefiero dejar el ensayo en un nivel independiente del terreno idealista.

De hecho, desde hace unos días me viene dando vueltas en la cabeza la idea de las románticas líneas de Antonio Machado —en la canción de Joan Manuel Serrat— “caminante, ¡no hay camino! Se hace camino al andar...” y esta misma idea la he contrapuesto al *sueño imposible* que dice: “con fe lo imposible soñar, ... buscar la verdad o el error, ... ese es mi ideal: la estrella alcanzar, no importa cuán lejos se pueda encontrar”. Observo que la primera canción nos invita un poco a vagar sin rumbo, a movernos en cualquier dirección sin importar el final. La canción es exquisitamente romántica porque tiene mucho de verdad y de encanto. La segunda es el ideal. Es localizar la estrella polar y orientar la brújula hacia allá; es determinar cuál es la dirección óptima para moverse y darse al propósito de llegar al final de ese camino con la fe y la convicción de que lo que hay al final es *lo mejor*. ♦

Las matemáticas me dan vértigo

LAURA ORTIZ BOBADILLA

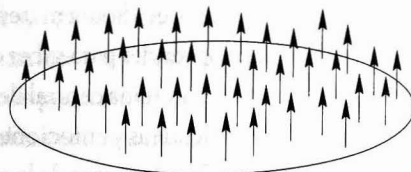
Tal vez porque siempre tuve otra idea de lo que eran las matemáticas, tal vez porque de niña nunca puse demasiada atención a mis maestros y tal vez porque ellos mismos, a pesar de sus buenas intenciones, tampoco tenían mucha idea de lo que era ese universo. Ese universo tan vasto, ordenado y caótico, concreto y abstracto, rígido y a la vez elástico, elástico... y hasta poético. ¡Qué locura!..., si tan sólo me lo hubiesen adelantado una vez... En fin, lo que voy a contar me sucedió un día... ¿qué día?..., algún día, da igual. Caminaba yo tranquilamente recordando una idea de Alejo Carpentier sobre lo real-maravilloso de nuestra América Latina, en la que expresa la necesidad de encontrar un vocabulario "metafórico, rico en imágenes y color, barroco —ante todo barroco— para expresar el mundo maravilloso de América. Las realidades ocultas detrás de las cosas visibles, las entrañas de lo invisible, las fuerzas latentes que mueven nuestro suelo, nuestro mundo telúrico",¹ cuando de repente un vector llamó mi atención. Para aquellos que no lo sepan, un vector es algo así como una flecha. Me acerqué con cautela pues nunca me había encontrado un objeto semejante así nada más, tiradito sobre el pasto. El vector, que pronto notó mi presencia, me invitó a subirme a él ya que, según dijo, llevaba tiempo esperándome. Yo, desconfiada, no le creí pero, posiblemente porque en mi mente retumbaban aún las ideas de lo real-maravilloso, o posiblemente porque nunca fui demasiado prudente, no dudé en sentarme sin mayor reparo en tan extraño artefacto. ¡Nunca lo hubiera hecho!, nada

más sentarme, el insensato arrancó a una velocidad endemoniada.

—¿A dónde vamos? —pregunté.

—A un campo de vectores —me contestó sin más explicación.

Yo sentí que él daba por hecho que yo sabía lo que era un campo de vectores y que, por lo tanto, externarle mi ignorancia podía ofenderle. Así, decidí agarrarme bien y esperar hasta ver a dónde llegábamos. Recuerdo que en ese momento, como lo único que podía imaginarme era un campo con flores, sólo se me ocurrió pensar que un campo de vectores sería algo así como un enorme jardín en el que, en lugar de pasto y flores sembrados, habría vectores parados así, como árboles.



—Ya estamos llegando a nuestro campo —me dijo—. Prepárate para vivir una experiencia excepcional. Has tenido suerte, no cualquiera se convierte en un punto de un campo de vectores.

—¿Un punto?! —exclamé—. Oye, espera, no creo que me agrade la idea de convertirme en un punto... Más tardé en decir esas palabras que en sentir que mi cuerpo se comenzaba a colapsar. Es difícil describir lo que se siente cuando los ojos se juntan con los pies, las manos, la boca... todo. Mis lentes cayeron ya no supe dónde. Era ahora un

¹ Entrevista de Miguel F. Roa, "Alejo Carpentier: el recurso a Descartes", Granma, La Habana, 18 de mayo de 1974.

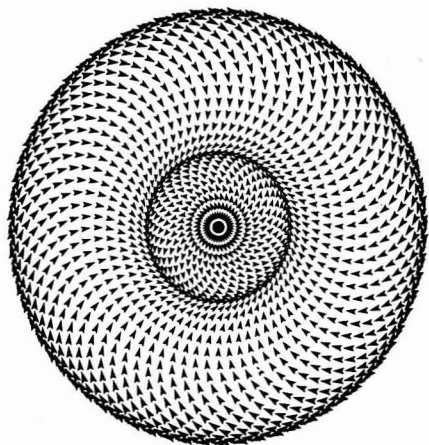
punto en el espacio y sólo sentía las distintas fuerzas que me empujaban para un lado y para otro, como a una partícula de polvo. Todo se movía y yo con ello.

—¿Cómo te sientes? —me preguntó mi amigo (?) vector (quien por cierto ahora se veía más grande).

—Mal —contesté—. No sé dónde quedaron mis lentes.

—Eso sí que tiene gracia —dijo un poco ofendido—. Te traigo con gran esfuerzo (pues hay que ver como pesas) para mostrarte algo sin igual y tú me sales con que te preocupan tus lentes... Fíjate muy bien, infinitamente cerca de ti hay infinitos puntos que como tú se están moviendo. No te das cuenta de ello porque tanto tú como ellos lo hacen de una manera muy parecida. Nosotros los vectores somos las fuerzas que, aplicadas a puntos, producimos el movimiento. Ese movimiento va describiendo una trayectoria. Fíjate allá a lo lejos. Aquellos puntos se mueven a otras velocidades y por eso sí los puedes percibir.

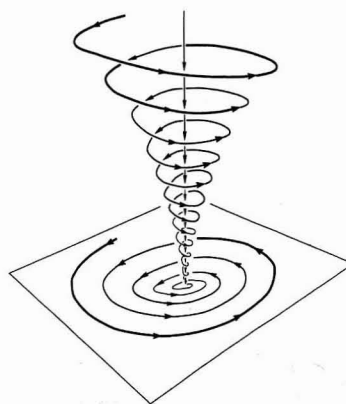
—Oye, allá se ven unos puntos que tienen un aspecto un poco apagado —observé.



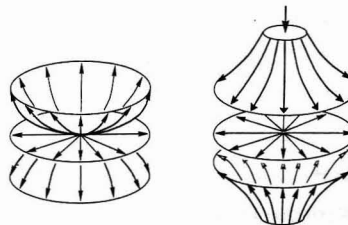
—¡Ah!, ya veo que comienzas a fijarte con más cuidado. Ésos son puntos metidos en un ciclo límite. Esos puntos regresan siempre al mismo lugar después de un determinado tiempo. Esas trayectorias son muy especiales. A ellas se acercan infinitas trayectorias (al avanzar el tiempo o al retroceder, según sea el caso). Los puntos que se hallan en los ciclos límite escuchan historias maravillosas de aquellos puntos que están en trayectorias que vienen de lejanos lugares. Pobres, ellos sólo pueden dar vueltas y vueltas sin ton ni son. A las personas como tú, o más bien como eras tú, les interesan mucho estas trayectorias. Siempre las están buscando y tratando de contar. Hace muchos años un tal Hilbert puso al mundo de cabeza: se le ocurrió preguntarse si era posible saber la posición y el número de ciclos límite que tenía un campo de vectores cuando éste viene de una ecuación

polinomial. No te imaginas el revuelo que se armó. A la fecha nadie sabe la respuesta, aunque debo decir que muchas cosas interesantes han sido estudiadas a raíz de esta pregunta. Por cierto, lo que sí se sabe es que, a lo más, una ecuación así tiene un número finito de ciclos.

—Oye, allá a lo lejos se ve algo así como un tornado, ¿no es peligroso?



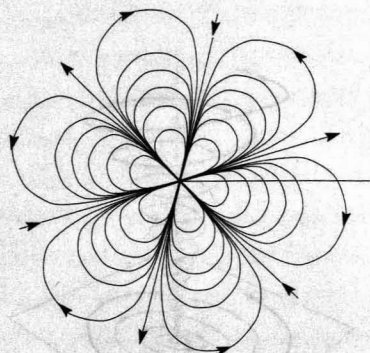
—No, lo que hay allá es un punto singular. Te voy a explicar: tú te convertiste en un punto común y corriente (o punto regular) que sigue su trayectoria con el tiempo como casi todos los demás puntos. Pero no todos los puntos de un campo son regulares, ¡qué va!, sería muy aburrido. Hay otros puntos, los puntos singulares. A éstos ningún vector los empuja para ningún lado y por ello permanecen fijos todo el tiempo. Sin embargo, hay muchas, infinitas trayectorias que se acercan por lo general a estos puntos según avanza o retrocede el tiempo, dependiendo del caso. El punto singular que hay en la punta de lo que llamaste "tornado" es tan sólo un tipo de punto singular, pero también hay otros tipos. Mira, allá hay uno como una fuente y más atrás se ve uno en forma de cascada.



"Estos puntos que acabas de ver son tal vez los más frecuentes de encontrar, pero hay muchos otros tipos. Mira, allá se ve otro no tan común.

Me quedé callada un buen rato admirando lo que tenía ante mí. —¡Qué bello es todo esto! —exclamé.

—Sí, la verdad es que tenemos la suerte de estar en un campo en el que suceden muchas cosas diferentes, casi podría decir que es un campo “barroco”. No todos son así, algunos son más sencillos y otros mucho más complicados. Yo creo que tan sólo la corriente de un río te daría ejemplos muy ricos de campos vectoriales.



—Ya comienza a hacerse tarde, pronto te tendrás que marchar. Recuerda que aquí eres una intrusa y no es correcto que permanezcas demasiado tiempo. Podría armarse todo un caos. Sin embargo, antes de que te vayas quiero que veas un campo complejo.

—¿Más complejo que éste? —pregunté.

—No precisamente. Cuando me refiero a complejo estoy pensando en los números complejos. ¿Nunca los estudiaste en la escuela? Son unos números que suelen escribirlos de la forma $a+ib$.

—¡Ah, sí! Recuerdo sólo que la i viene de imaginario.

—Pues el número i es el número complejo que tiene la puntada de que al multiplicarlo por sí mismo da -1 .

—La verdad, debo reconocer que nunca entendí demasiado, ya que los cuadrados de los números que conozco son positivos o cero. ¡Con razón llaman a esos otros números complejos!

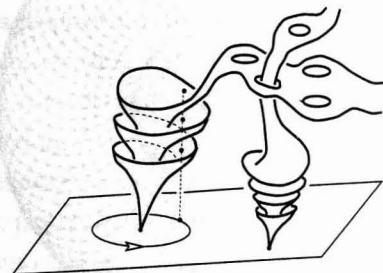
—Pues prepárate. Vas a entrar en lo imaginario. Curiosamente, muchas de las cosas que no entendemos en el espacio real tienen su explicación en el espacio complejo. Los campos de vectores son ahora campos de direcciones: en un punto no veremos un vector como antes, sino un plano, y las trayectorias no serán curvas, sino superficies. Algo así como sábanas infinitas que se enredan por todo el espacio. ¿Estás lista?

—Creo que sí —respondí.

Lo que allí vi no me será fácil de explicar en pocas líneas. Entré en un mundo imaginario en donde no existe el antes ni el después. El tiempo es complejo. Sí, complejo en todos los sentidos: nosotros estamos acostumbrados a

que el tiempo tenga sólo una dimensión (como una recta en la que es claro hablar de antes y después), pero aquí el tiempo tiene dos dimensiones y por lo tanto el antes y el después no tienen sentido. Yo me sentía perdida en un laberinto de sábanas que se enredaban unas con otras. No entiendo cómo todo cabía allí. Estaba en un espacio de cuatro dimensiones viviendo en un tiempo de dos ... ¡Uf! Vi de pronto algo como un punto singular situado en un plano. Alrededor de éste se hallaba un punto rojo que giraba y giraba sin parar. Yo me encontraba más arriba y decidí seguir el movimiento del punto rojo (desde mi sábana). Todo parecía marchar bien. Sin embargo, después de un rato me di cuenta de que por más que caminaba y caminaba nunca regresaba yo al mismo lugar. El punto rojo no hacía más que dar vueltas y vueltas alrededor del punto singular y yo arriba parecía subir y subir sin regresar nunca al lugar del que había partido.

Este fenómeno, según supe más tarde, se llama monodromía. Decidí cambiar de rumbo sobre mi misma “sábana” y me encontré con un paisaje de túneles (el género de las superficies)... Me sentí inmersa en un cuento de ciencia ficción..., me dio vértigo... Mi amigo vector me encontró en ese laberinto.



—Tienes que regresar —me dijo.

—¿Cómo podré volver a este espacio complejo? —pregunté.

—El camino es largo y, como en todas las cosas, lleno de alegrías y sinsabores. Toca la puerta al mundo de las matemáticas, da rienda suelta a tu curiosidad, a tus dudas y, sobre todo, sé muy perseverante.

Regresé al parque sola. La “dinámica compleja” me cautivó. Nunca pensé que toda esa maravilla estuviese encerrada en el universo matemático. Ahora yo estoy inmersa en ese mundo. Me debato diariamente entre las monodromías, los ciclos y muchas otras cosas apasionantes. Sí, las matemáticas me producen vértigo, pero no un vértigo desagradable, sino el vértigo que produce lo que es sencillo y barroco a la vez, la vida, lo real-maravilloso y lo maravilloso-imaginario. ♦

Matemáticos de celuloide

IVÁN TRUJILLO
ROSA MARGARITA MAUPOMÉ

El surgimiento del cine, hace más de cien años, fue producto tanto de las necesidades como de las aportaciones de algunos científicos de la época. Pronto dejó de ser sólo un instrumento de laboratorio para convertirse en un espectáculo de masas, en un arte para algunos y en un próspero negocio para los menos. De entonces a la fecha se han llevado a la pantalla todos los temas imaginables. Sin embargo, como si se tratase de una venganza contra sus creadores, no es raro que cuando los personajes de las películas son hombres de ciencia sean presentados como villanos. Si nos guiamos por lo que vemos en el cine, lo que por diversas vías pretenden las mentes "diabólicas" de físicos, químicos y médicos es ejercer el poder en cierta comunidad o de plano adueñarse del planeta. En ocasiones sus macabras intenciones se ven frustradas por obra de la misma criatura que ellos produjeron (como ocurre en *Metrópolis* y en *Frankenstein*) pero las más de las veces esto sucede gracias a la afortunada intervención de James Bond, Batman o cualquier otro superhéroe local. Podemos afirmar, no obstante, que dentro de la imagen estereotipada que el cine proyecta del grueso de la comunidad científica, los matemáticos son los que resultan mejor librados.

Un alfeñique de sesenta kilos

La manera típica de caracterizar a los matemáticos es como personas distraídas o ensimismadas, delgadas (hasta el momento no ha aparecido un matemático gordito en el cine), aficionadas a menudo a la música clásica e inofensivas en apariencia, aunque a la hora de la verdad son capaces, gra-

cias a su talento, de vencer cualquier adversidad. Éste es precisamente el papel de Dustin Hoffman en *Perros de paja* (*Straw Dogs*, Sam Peckinpah, Estados Unidos, 1971) donde encarna a un verdadero alfeñique que decide que la campaña inglesa es un buen lugar para resolver ecuaciones. Su guapa esposa, en un afán por atraer su atención y sacarlo de su encierro, le hace bromas, como cambiarle algunos signos de las complicadas fórmulas matemáticas a las que se enfrenta. La tranquilidad del lugar se ve interrumpida por la presencia de un grupo de trabajadores de la construcción que, en lugar de ocuparse de terminar la cochera de la pareja, violan a la mujer y luego tratan de asesinar a ambos. Armado de ingenio y valor, el afable matemático encara al grupo de delincuentes a quienes inflige su merecido castigo.

En 1980, Krzysztof Zanussi en *La constante* (*Constant*, Polonia, 1980), plantea la relación de un alpinista con un taciturno profesor de matemáticas, trama con la cual aprovecha para hacer en su momento una profunda crítica al sistema socialista de su natal Polonia.

Otro matemático aparentemente debilucho aparece en *Con ganas de triunfar* (*Stand and Deliver*, Ramón Menéndez, Estados Unidos, 1987). En esta película, Jaime Escalante (Edward James Olmos), un profesor de origen boliviano, decide impartir clases de cómputo en una escuela secundaria de un barrio chicano, en Los Ángeles; sin embargo, se encuentra con que no hay computadoras debido a que el plantel atraviesa por graves problemas económicos, de modo que tendrá que enseñar matemáticas. A pesar del bajo nivel académico de la escuela y de la violencia que en ella impera, e independientemente del entorno familiar

desfavorable de los estudiantes y de la precaria salud del maestro, los alumnos de Jaime logran aprobar de manera sobresaliente un examen nacional gracias a que éste les imparte clases suplementarias. Sin embargo, el hecho de que todos los alumnos de esa mediocre secundaria hayan aprobado suscita la desconfianza del organismo evaluador, que decide anular el examen. Después de protestar contra esta medida, que estiman discriminatoria para la comunidad latina, Escalante y sus muchachos acceden a someterse a otro examen, que nuevamente es aprobado por todos.

Este filme (por el que Edward James Olmos fue candidato al Oscar como mejor actor) contribuyó a enaltecer la imagen de la comunidad chicana, considerada por muchos como la más atrasada de las minorías estadounidenses. Apegada a hechos reales, *Con ganas de triunfar* no es sólo un homenaje a la docencia al estilo de *Al maestro con cariño*, sino que también trata de romper con la falsa idea de que las matemáticas se presentan como la materia más difícil para cualquier estudiante.

Los matemáticos, personajes fantásticos

Pese a que no nos atreveríamos a decir que en el cine actual están de moda los matemáticos, sí podemos afirmar en cambio que en los noventa ha habido más referencias a ellos o a su labor que en el resto de la historia de la cinematografía. El estereotipo de matemático aparentemente frágil y al mismo tiempo lleno de valor del personaje de *Perros de paja* sigue siendo más o menos vigente; sin embargo, actualmente aparece exaltando los misterios de su mente en el cine fantástico o de ciencia ficción, basado por lo general en obras literarias de este género.

Un ejemplo que viene al caso en este contexto es *Parque jurásico* (*Jurassic Park*, Steven Spielberg, Estados Unidos, 1993). En esta película, la única razón para invitar al displicente matemático Ian Malcom (Jeff Goldblum) a que visite el asombroso proyecto es su condición de experto en la teoría del caos. Al final de la cinta resulta que Malcom —a pesar de estar herido, igual que los paleontólogos Alan Grant (Sam Neill) y Ellie Sattler (Laura Dern)— sobrevive y ayuda a salvar a varias personas de morir en las garras y fauces de dinosaurios, con lo cual confirma su predicción: “la naturaleza encontrará su camino”.

En realidad, en *Parque jurásico* las matemáticas ocupan un lugar mucho más importante que el presentado a través del personaje interpretado por Jeff Goldblum:

de hecho, son éstas las que dan vida a los dinosaurios, y no la clonación, como se nos hace ver, pues con esta película se inicia un sofisticado proceso de animación por computadora que hace posible crear para el cine esos y otros terribles monstruos. Aunque nadie lo note, Jeff todavía regresa por la revancha como matemático en *Mundo perdido* (*The Lost World: Jurassic Park*, Steven Spielberg, Estados Unidos, 1997).

Un elemento que tal vez podría considerarse como un fundamento matemático en el cine consiste en que no se necesita un presupuesto de la misma magnitud que el de *Parque jurásico* para hacer una película interesante, como se ha demostrado en los dos filmes a los que nos referiremos a continuación. En *Moebius* (Gustavo Mosquera R., Argentina, 1996), filme basado en la novela del científico estadounidense A. J. Deutsch y producido y realizado por estudiantes de la Universidad del Cine de Buenos Aires, vemos cómo, a partir de un hecho insólito (un convoy del metro de Buenos Aires ha desaparecido en pleno funcionamiento), se teje una historia que nos parece verosímil durante el tiempo que dura la proyección. Ante la presión burocrática que se ejerce para encontrar una explicación a la misteriosa desaparición del convoy, el único que da la cara por parte de la empresa constructora es un joven matemático que descubre que en la intrincada red de túneles del metro se ha formado una cinta de Moebius por la que el tren ha entrado a otra dimensión. El conductor del convoy resulta ser su viejo maestro de topología y, aunque el tren regresa a la realidad, maestro y alumno continúan su viaje por la cinta de Moebius.

Otra película con un inicio insólito es *El cubo* (*Cube*, Vincenzo Natali, Canadá, 1997). En ésta, un grupo de personas aparece misteriosamente en el interior de una construcción dividida en una serie de cuartos algunos de los cuales pueden ser trampas mortales. Los papeles parecen estar bien definidos: un ex convicto, una doctora, un arquitecto, un policía, una joven estudiante de matemáticas y un autista. En un principio, todos ellos unen esfuerzos para poder escapar de un lugar al que han sido llevados sin saber el motivo ni el fin. Pero el planteamiento fantástico se torna un drama psicológico en donde la desesperación saca a relucir lo mejor y lo peor de cada personaje. La chica matemática de lentecitos, acorde con el esquema de debilidad física del gremio, descubre que hay códigos basados en números primos que determinan que cada uno de los cuartos sea o no una trampa. Llega un momento en que los cálculos alcanzan una complejidad tal que sea necesario contar con una

computadora. Ahí entra en acción el autista, quien es capaz de realizar esas operaciones en unos cuantos segundos. Paradójicamente, él será el único que logre salir con vida del misterioso *cubo*.

Autistas y superdotados

La primera referencia a la capacidad de algunos autistas para resolver largas operaciones aritméticas había aparecido en el cine en la década de los ochentas en *Cuando los hermanos se encuentran* (*Rain Man*, Barry Levinson, Estados Unidos, 1988). Inspirado aparentemente en un caso real, este filme, en el que también interviene Dustin Hoffman, no sólo nos habla de la aceptación de los discapacitados, sino también de la relación entre la habilidad matemática y la genialidad. Cuando Charlie Babbit (Tom Cruise) escucha a su hermano Raymond (Hoffman) dar el resultado correcto de una raíz cuadrada, en cuestión de segundos, exclama: "¡Es un genio... debería trabajar en la NASA!"

El esquema de autistas superdotados para las matemáticas volvió a aparecer recientemente en *Máxima seguridad* (*Mercury Rising*, Harold Becker, 1998). En este caso Simon, un niño autista, inocentemente descifra en un crucigrama un código secreto de la Agencia de Seguridad Nacional, con lo cual se convierte en víctima de la persecución de Kudrow (Alec Baldwin), un oficial de la Agencia. Se encomienda entonces a Aart Jeffries (Bruce Willis), el típico agente atormentado del FBI, la misión de encontrar a Simon después de que la gente de Kudrow ha asesinado a sus padres. A partir de ese momento, Simon queda bajo la protección exclusiva de Aart y se ve inmerso en las poco creíbles secuencias de acción al estilo de la serie *Duro de matar*.

En algunas películas aparecen personajes superdotados que, sin ser autistas, sorprenden a propios y extraños por su inteligencia y capacidad matemática, que a menudo es producto de una actividad autodidacta. *Matilda* (Dani de Vito, Estados Unidos, 1996) y *Mentes que brillan* (*Little Man Tate*, Jodie Foster, 1991) nos cuentan, la primera en tono de comedia y la segunda como melodrama, las historias de una niña y de un niño genios, Matilda (Mara Wilson) y Fred Tate (Adam Hann-Byrd), respectivamente, que se enfrentan a un mundo en el que no es fácil tener cabida. En ambos casos, la moraleja es que el hecho de ser superdotado no impide ser feliz. Precisamente esa misma problemática ha sido abordada también, en mayor o menor medida, en varias producciones recientes.

Los matemáticos también lloran

Otra niña prodigio es Teresa, en *Memorias de Antonia* (*Antonia's Line*, Marleen Gorris, Bélgica-Holanda, 1995), película que describe los problemas de diversa índole que enfrentan cuatro generaciones de mujeres. A Teresa, miembro de la tercera generación, le toca representar el papel de la mujer con un alto coeficiente mental. De pequeña resuelve, al igual que Matilda, complejas operaciones aritméticas. Sin embargo, en el caso de Teresa, somos testigos (a diferencia de lo que ocurre con Matilda) de los acontecimientos que marcan su crecimiento: desde su aprendizaje con un viejo filósofo nihilista, una violación, su vinculación con la música, hasta su conversión en una joven maestra de matemáticas que en el ambiente académico no encuentra pareja, por lo que finalmente elige a su amigo de la infancia, dedicado desde siempre a las labores del campo.

Si en *Memorias de Antonia* este episodio es sólo una parte de todo el argumento, la relación sentimental entre una matemática y un hombre ajeno al mundo académico es el eje de la comedia romántica que en México titularon *La fórmula para el amor* (*I.Q.*, Fred Schepisi, Estados Unidos, 1994). Ambientada en Nueva Jersey en los años cincuentas, cuenta la historia de un joven trabajador de un taller mecánico (Tim Robbins), que se enamora a primera vista de una bella matemática (Meg Ryan), quien resulta ser sobrina de Albert Einstein y está a punto de casarse con un inglés petulante dedicado a realizar experimentos basados en la psicología conductista. El mismo Einstein (Walter Mathau), con la complicidad de tres amigos matemáticos, recurre a todo tipo de trucos para hacerle creer a la chica que el mecánico posee una mente privilegiada a fin de que se enamore de él. La estrategia parece funcionar, y la muchacha se interesa cada vez más por el recién descubierto genio. Al final, obviamente se da cuenta del engaño pero, a pesar de la decepción, entiende que ama de verdad al mecánico.

Dentro de la misma línea en que se abordan las complejas relaciones sentimentales de los matemáticos, recientemente apareció la tercera película dirigida por Barbra Streisand, *Las dos caras del amor* (*Mirror Has Two Faces*, Estados Unidos, 1998), otra comedia romántica que nos describe el enlace del profesor Gregory Larkin (Jeff Bridges) con la profesora de literatura Rose Morgan, interpretada por la misma Streisand. Después de varias decepciones amorosas, Gregory pone un anuncio en la sección de corazones en busca de una relación sin sexo. A ese

llamado acude Rose, quien carga con un complejo de fea debido a la belleza de su madre (Lauren Bacall) y de su hermana (Mimi Rogers). Las cosas parecen funcionar bien. Luego de una discusión sobre números primos, Gregory queda sorprendido por la inteligencia de Rose y le propone matrimonio. La situación se complica cuando ella desea tener relaciones sexuales, y empeora aún más cuando, en contra del planteamiento de Gregory, para quien sólo se trata de "un encuentro entre dos mentes", Rose recurre a dietas y ejercicios con la pretensión de estar bella para seducirlo.

Precisamente un encuentro de ese tipo ocurre en *Mente indomable* (*Good Will Hunting*, Gus Van Sant, 1997), uno de los filmes sobre niños genios que más éxito ha tenido. Aquí la imagen estereotipada del matemático debilucho cambia un poco y vemos cómo Will Hunting (Matt Damon), un joven rebelde que trabaja barriendo las aulas de Cambridge, resuelve de manera autodidacta los teoremas más complicados que ningún estudiante regular es capaz de solucionar. El profesor de matemáticas se da cuenta de la extraña capacidad del chico y pretende incorporarlo a su equipo de trabajo. A Matt no parecen importarle en lo más mínimo las grandes ofertas de trabajo en empresas importantes ni la vida académica, ya que su único interés es la estudiante de medicina Skylar (Minnie Driver). El profesor recurre a varios psicólogos para que hagan entrar en razón a Will, quien sólo encuentra un equilibrio entre su creatividad y su mundo emocional cuando establece una relación amistosa con Sean McGuire (Robin Williams).

Aún sin estrenarse en México, la película más reciente en la que aparece un matemático es *Pi* (*Pi*, Darren Aronofsky, Estados Unidos, 1998), ganadora del premio al mejor director dramático en el Sundance Film Festival, que según sus productores fue realizada con un presupuesto de apenas sesenta mil dólares. En este *thriller* de ciencia ficción aparece por fin un matemático malo, el doctor paranoide Maximilliam Cohen (Sean Gulleter), quien está convencido de que "las matemáticas son el lenguaje de la naturaleza", que ésta se comporta de acuerdo a ciertos patrones establecidos y que, por lo tanto, las fluctuaciones en la bolsa de valores siguen patrones similares predecibles. Sobre decir que, en ese contexto, las investigaciones del compulsivo doctor Cohen son muy valiosas y que varios personajes están dispuestos a matar con tal de obtener su secreto. De los múltiples comentarios vertidos sobre el éxito de *Pi*, cinto que contrasta con el encasillamiento que se hace de los

matemáticos en el cine fantástico, vale la pena citar el de Corey S. Powell: "Probablemente si se presentara a matemáticos reales, haciendo lo que la mayoría de los matemáticos realmente hacen, nunca se lograrán meter multitudes en los cines."

Tal vez por esa misma razón las biografías cinematográficas de personajes relacionados con las matemáticas en general han brillado por su ausencia o de plano han sido sumamente fallidas, como *El joven Einstein* (*The Young Einstein*, Yahoo Serious, Australia, 1988) en la que el supuesto homenaje al científico alemán se convierte en realidad en una aburrida parodia pop. Dejando de lado a *Giordano Bruno* (Giulano Montaldo, Italia, 1973), la vida y obra de quienes realmente lidiaron con los números hay que buscarla en la televisión cultural. Una producción de la BBC, por cierto de muy buena factura, es el ejemplo más reciente dentro de este género. Se trata de *Breaking the Code* (Hugh Whitmore, Gran Bretaña, 1997) que rescata la figura del matemático Alan Turing, quien, entre otras cosas, descifró los códigos de comunicación nazi durante la segunda Guerra Mundial, pese a lo cual no se le hizo justicia en su momento por su condición de homosexual.

Aunque sería imposible describir en este espacio todo lo que se ha hecho con fines educativos sobre el tema de las matemáticas, no se puede dejar de señalar que la primera experiencia de que se tiene noticia en este sentido se registró en Alemania en 1911. Nos referimos a los trabajos del doctor Ludwig Münch, de Darmstadt, quien utilizó el cine de animación para mostrar a sus alumnos complicados problemas geométricos. Tampoco podemos pasar por alto el gran trabajo producido en 1937 por la gran figura de la divulgación científica a través del cine, Jean Painlevé, junto con René Bertrand. *Imágenes matemáticas de la cuarta dimensión* (*Images mathématiques de la quatrième dimension*, Francia), un filme que conserva toda su vigencia y en el que con la asesoría de una larga lista de destacados matemáticos franceses se plantea, de manera sencilla y con humor, la posibilidad de que realmente exista otra dimensión. Otro esfuerzo considerado ya como un clásico del cine educativo sobre el tema es *Donald en el país de las matemáticas* (*Donald in Mathmagic Land*, Hamilton Luske, Estados Unidos, 1959), producción de los estudios Disney, en la que el famoso personaje nos muestra que las matemáticas abundan en nuestro entorno y que su comprensión no necesariamente plantea dificultades.

Klaatu baranda nikto

Otro aspecto de las matemáticas que el cine se ha encargado de difundir es su posible utilización como lenguaje común con formas de vida inteligente en otros planetas. Al margen de las series sobre temas interplanetarios como *Flash Gordon* y otras, en las que constantemente aparece algún científico que procesa datos matemáticos o un instrumento que realiza esa función, el tema de la comunicación matemática entre dos mundos se inicia quizá con *El día que paralizaron la tierra* (*The Day the Earth Stood Still*, Robert Wise, Estados Unidos, 1951). En este caso, paradójicamente, la iniciativa es de unos marcianos pacifistas que vienen a advertir a los habitantes de nuestro planeta del riesgo de autodestrucción a causa de las pruebas nucleares. Al recibir como respuesta la agresión de los soldados estadounidenses, el mensajero Klaatu (Michel Rennie), después de darse cuenta que no todos los terrícolas son mala onda, convence al doctor Barnhardt (Sam Jaffe) del peligro a través de un postulado matemático; Barnhardt, a su vez, convoca a científicos de todo el planeta para escuchar el mensaje de paz y constatar el poderío de los extraterrestres, que dejan sin electricidad al mundo por espacio de una hora.

De manera análoga, en la reciente e infumable *El día de la independencia* (*Independence Day*, Roland Emmerich, Estados Unidos, 1996) el científico David Levinson (Jeff Goldblum), quien sospecha que su mujer tuvo, como se dice hoy, una relación "impropia" con el mismísimo presidente de los Estados Unidos, descubre por la vía matemática el inminente ataque de extraterrestres en puntos clave del planeta, incluido, desde luego, Washington, D. C. Luego de que el ejército estadounidense ha sido prácticamente barrido por los extraterrestres, David logra generar un virus que al ser introducido en el sistema de cómputo de los invasores hace vulnerables a sus naves. El resto ya lo sabemos: con el presidente estadounidense como líder, el mundo se salva y desde entonces en todo el orbe se debe celebrar el 4 de julio. Un planteamiento mucho más benevolente lo encontramos en la versión fílmica de la novela de Carl Sagan, *Contacto* (*Contact*, Robert Zemeckis, Estados Unidos, 1997), en donde la astrónoma Ellie Arroway (Jodie Foster) es la encargada de descifrar un mensaje basándose en los números primos. La cinta también da pie para esbozar algunos de los problemas a los que se enfrenta la comunidad científica al llevar a cabo su labor, por ejemplo, la falta de credibilidad, la escasez de recursos económicos, la piratería de datos y logros y la misoginia.

Pocas semanas después de haberse estrenado *Contacto*, apareció *La esfera* (*Sphere*, Barry Levinson, Estados Unidos, 1998) en la que Dustin Hoffman actúa de nuevo en una película que abunda el tema de las matemáticas, aunque en esta ocasión no interpreta el papel de un matemático sino el de un psicólogo que es el responsable indirecto de conformar un grupo en el que participan un matemático, una bioquímica y un astrofísico, cuya misión consiste en desentrañar el misterio de una nave espacial hundida en las profundidades del océano. En palabras del militar que les da las primeras instrucciones, la función del matemático "será la de aplicar las matemáticas como posible lenguaje común para establecer contacto". De hecho así ocurre, pues Harry, el primer matemático de raza negra en el cine, logra establecer comunicación traduciendo, a través de una computadora, una serie de números a palabras (desde luego en inglés), transmitidos por un supuesto extraterrestre o visitante del futuro que vive dentro de una gran esfera encontrada en el interior de la nave. La situación se vuelve confusa no sólo para el espectador, sino también para los mismos miembros de la tripulación, ya que tres de ellos, quienes tuvieron contacto con la esfera, son capaces de materializar sus pesadillas a la vez que proceden a eliminar al resto de sus compañeros. El filme pretende tomarse más en un drama psicológico que de extraterrestres, y la única forma que encuentran para que haya un final "feliz", es recurrir a esa maravillosa capacidad humana que es el olvido, mismo que seguramente será el destino de esta película.

Éste ha sido un breve recuento de las principales apariciones de matemáticos en el cine. Otras referencias más elaboradas al ámbito de las matemáticas, sobre todo con un planteamiento sociológico en las que los matemáticos no aparecen en pantalla, habrá que buscarlas en películas de cineastas fuera de la órbita de Hollywood como *Los siete samuráis* (*Shichinin no samurai*, Akira Kurosawa, Japón, 1954), *Padre padrone* (Vittorio y Paolo Taviani, Italia, 1977), *Stalker* (Andrei Tarkovsky, URSS, 1979) y, desde luego, hoy en día en la obra de Peter Greenaway, en especial en *Ahogándose por números* (*Drowning by Numbers*, Gran Bretaña-Holanda, 1987). Por último, diremos que en el cine mexicano sólo pudimos detectar la presencia de un matemático en tres películas: se trata de un luchador que ostenta ese nombre y que aparece como comparsa de otros héroes del ring en *Huracán Ramírez y la monjita negra* (Joselito Rodríguez, 1972), *El torito puños de oro* y *El torito de Tepito* (ambas de Juan Rodríguez Mas, 1979 y 1982). ♦

Acerca de la industria cultural y la globalización entre México y EUA

DELIA CROVI DRUETTA

La nueva obra de Florence Toussaint no sólo nos remite a sus trabajos anteriores sobre medios electrónicos e industria cultural en general, sino que también es una muestra de la minuciosidad y el cuidado con que reúne, presenta e interpreta los datos referidos a este importante sector de la comunicación masiva.

Televisión sin fronteras, editada recientemente por Siglo XXI, constituye además un documento imprescindible para conocer los cambios sustantivos que ha experimentado la televisión mexicana en los últimos años.

En palabras de la propia autora, "México y sus instituciones han cambiado más en trece años, de 1985 a 1998, que en los anteriores sesenta. La televisión y en general la industria de la cultura se han visto inmersas en una intensa transformación".

Esta afirmación apunta también al propósito mismo de su investigación, que está atravesada por dos ejes fundamentales: la historia y la economía. En efecto, podemos afirmar que se trata de un trabajo inscrito en la economía política de la comunicación, en el que además de la lectura de los datos que nos ofrece, se pondera la enorme importancia que los procesos privatizadores, las alianzas y las fusiones tienen en la industria del entretenimiento y de la televisión de fin de siglo.

La autora alcanza los objetivos que enuncia desde el inicio de su trabajo, mediante un análisis del complejo tema de la globalización, que luego se concentra en el caso concreto de la televisión. Para Florence se trata, como el propio título de su libro lo anuncia, de una televisión sin fronteras.

Sabemos que, para algunos, la globalización presenta enormes ventajas y constituye, de algún modo, un horizonte natural de las sociedades de fin de siglo. Pero la aproximación que realiza Florence Toussaint a este tema es sin duda crítica. Dice la autora:

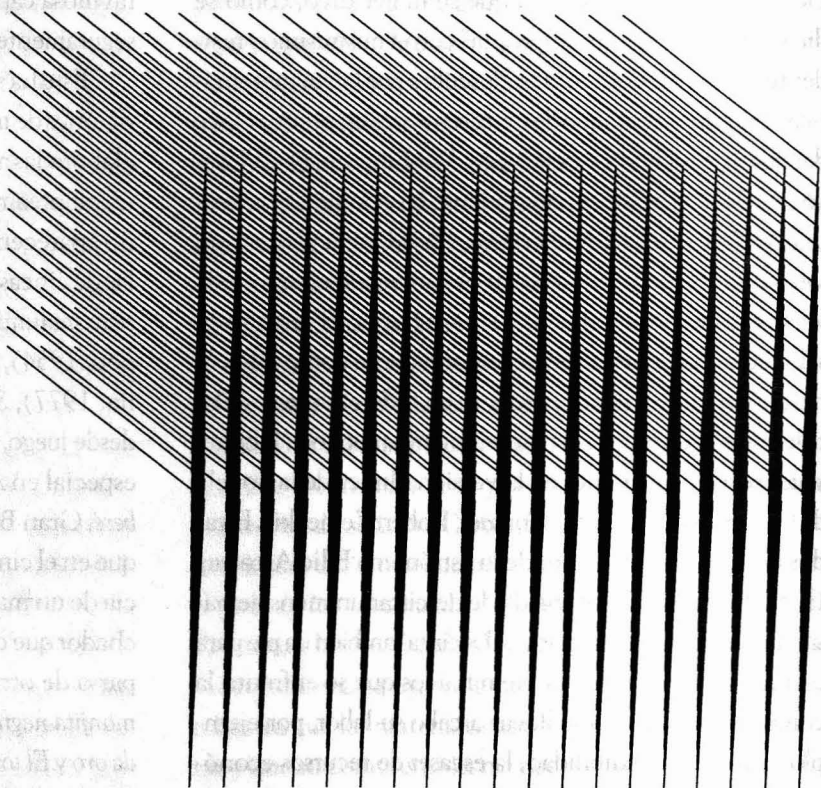
Hoy se habla de globalidad como en años anteriores se hablaba de transnacionalización, de imperialismo o de expansión capitalista. Pero lo que estos términos denominan tiene que ser inscrito en un contexto de contradicciones permanentes, que cambian de signo y de forma pero

que son inherentes a procesos como el aquí descrito.

Al mismo tiempo se pregunta:

¿Qué sistema que excluye a las dos terceras partes de la humanidad de los beneficios económicos, de la posibilidad de tomar decisiones, de la libertad de construir sus propias imágenes, como lo está haciendo el capitalismo actualmente, no se ha enfrentado con resistencia de todo tipo, con oposiciones sistemáticas, con propuestas alternativas?

Así, desde su primer apartado sobre globalidad, la autora recurre a la teoría para apoyar el camino que posteriormente tomará su trabajo. Considera que la globalización tiene mayor fuerza en el ámbito económico que en el cultural, porque entiende que en este último aún quedan ciertos espacios para una producción más independiente, más plural, alternativa, que



se insertaría en lo que ella misma plantea como una posibilidad de *resistencia de todo tipo*.

Este inicio deja claro que la industria cultural mexicana tiende a fusionarse con la estadounidense en aras de pasar a formar parte de lo que es la tendencia internacional: globalizar la economía y, dentro de ella, el sector audiovisual. La autora explica que las grandes corporaciones tienen así abiertas las puertas para introducirse en un mercado, el mexicano, que cuenta con más de cinco décadas de desarrollo. Dicho en otros términos, las corporaciones estadounidenses que buscan colocar sus productos en ese mercado se encuentran con *la mesa servida*.

A partir de este punto de arranque, Florence Toussaint da cuenta del desarrollo de las industrias culturales tanto de los Estados Unidos como de México. El caso estadounidense se presenta en dos capítulos: en el primero, "De Mickey Mouse a Hércules", se plantea el origen y evolución de las industrias culturales en el vecino país, mientras que en el segundo, "De Fox a News Corporation", la autora se detiene a analizar cuatro grandes corporaciones (ABC-Capital Cities-Walt Disney, Time-Warner-Turner, Radio Corporation of America-National Broadcasting Company-General Electric y Fox-News Corporation-Metromedia) que tienen intereses en México y que, por lo tanto, inciden en nuestra propia industria cultural.

Para analizar el caso de México, Florence Toussaint ocupa cuatro capítulos. En el primero de ellos aborda, en un principio, el tema de los pioneros de la televisión y posteriormente se detiene en el crecimiento de esta industria, que ubica entre 1940 y 1972. Dentro de este mismo apartado, la autora se refiere más tarde a la consolidación del sector, que se da entre 1972 y 1985, para finalmente hablar del periodo de transnacionalización que, en su opinión, ocupa la década 1985-1995.

Los restantes tres capítulos referidos a México tratan por separado los casos de las tres grandes empresas de televisión: el consorcio Televisa, el cambio de Imevisión a Tv Azteca y Multivisión. La autora nos hace notar cómo la expansión de cada empresa culmina en la transnacionalización,

signo de la última década. Las alianzas, fusiones, compras, ventas, acuerdos, siempre tienen un fin: el ingreso a la globalización, ya sea por medio de la integración vertical o por la integración horizontal.

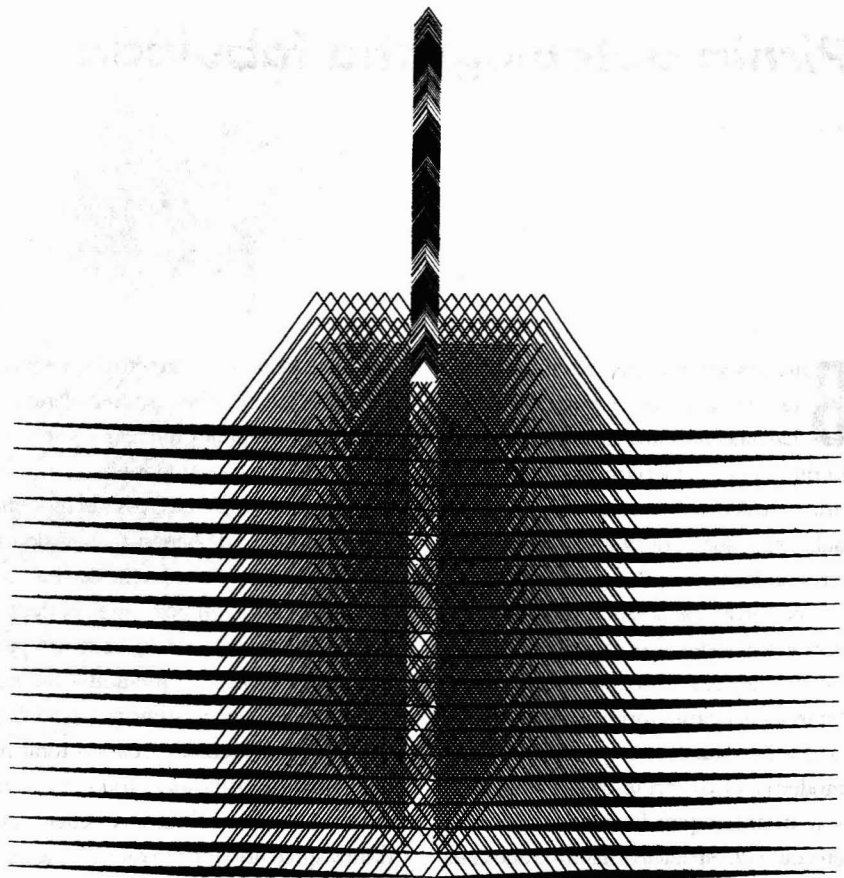
La presente investigación —nos dice Florence Toussaint en la parte final de su libro— demuestra que la cultura, en tanto industria, sea la mexicana o la estadounidense, se ha regido desde sus inicios por las pautas que han marcado los acontecimientos históricos en la economía y la política. También que la vecindad ha constituido el elemento fundamental para que ambas industrias se encuentren hoy totalmente entrelazadas. La hegemonía de Estados Unidos se manifiesta en su control de la tecnología y del capital en los medios. Y si bien la expansión mexicana hacia el exterior es un hecho que parece consolidarse, el proteccionismo de las compañías estadounidenses es muy notorio, ya que éstas se nutren de los productos locales y, salvo las empresas destinadas a la población de habla hispana, no aceptan en su progra-

mación ni series, ni telenovelas que hayan sido producidas al sur del río Bravo.

La visión de la industria cultural como negocio y la conversión de los productos culturales y de entretenimiento en mercancía son ideas que atraviesan todo el trabajo de Florence Toussaint en el que, como ya se ha señalado, abundan los datos que permiten al lector ir tejiendo, de la mano de la autora, la complicada urdimbre de la industria cultural nacional, cada vez más globalizada ya sea por las propias empresas mexicanas o por la incesante incursión de los consorcios extranjeros, en especial, los estadounidenses.

Televisión sin fronteras es un libro minucioso, preciso, que retrata un periodo sustancial de la industria audiovisual mexicana y, también, de la de los Estados Unidos. Es, por lo tanto, un trabajo imprescindible para quienes buscan comprender la dinámica de este sector a fin de siglo. ♦

Florence Toussaint: *Televisión sin fronteras*, Siglo XXI, México, 1998. 183 pp.



Picnic: autobiografía fabulada

ALBERTO DALLAL

Bailarín sorprendente, presencia incontenible de la danza mexicana desde *Dos mujeres y un diario* (1984), Raúl Parrao siempre ha manifestado fantasía y desparpajo (léase espontaneidad) en sus hábiles producciones y sus montajes frescos. Fundador en 1985 de U. X. Onodanza (grupo con el apellido de Danza Bizarra), Parrao no ha dejado de presentar espectáculos dancísticos de naturaleza contestataria, con afanes innovadores, algunos con la *impronta* de la energía juvenil posmoderna, otros con visos de la más consistente de las aspiraciones coreográficas: la erección de espacios dinámicos que conlleven talento y originalidad y que, a la vez, contengan un tipo de danza joven y profesional.

Influido por un tácito *op art* electrónico (obligada peregrinación de los coreógrafos verdaderamente jóvenes de las postrimerías del siglo XX) y por un *pop art* de tiernas reconsideraciones subliminales, a veces muy, muy mexicanas, Parrao ha ido exponiendo en una envidiable coreocronología sus más operativas fantasías personales pero también su tendencia más notable: superar el concepto tradicional de *coreografía* mediante un espectáculo escénico que conlleve y espete a los espectadores todos los recursos contemporáneos de acercamiento y subyugación en relación con una especie de indiferente verosimilitud formal, aunque se haga prevalecer el relato dramático-coreográfico como punto de unión con las variadas mentalidades del público. Con esta ardua tarea en mente, Parrao, en el trayecto, ha tenido que defenderse —como siempre ocurre en el arte de la danza— con cuerpos ávidos de bailar, muy bien dotados, a veces por la naturaleza, a veces por la técnica, o por la combinación de ambos elementos. Ciertamente, en los espectáculos

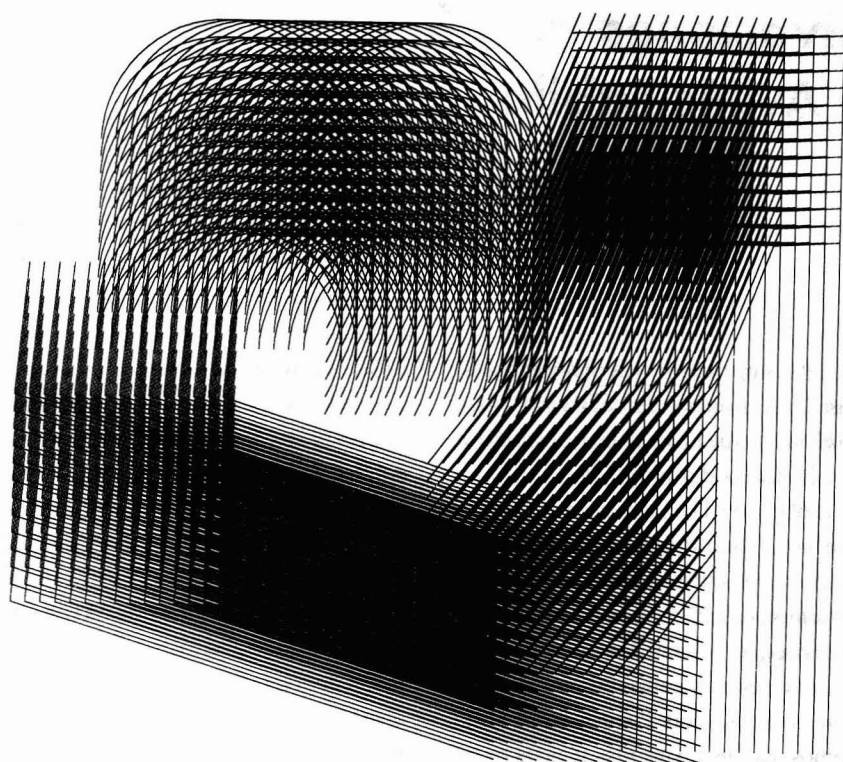
de Parrao siempre hacen acto de presencia bailarines jóvenes que permiten al inquieto coreógrafo variar y re-crear sus vehículos de mostración. Suponemos, asimismo, que durante los ensayos y el montaje estos bailarines devienen puntos de inflexión coreográficos y fuentes de inspiración inmediata; en ocasiones perfectos pretextos para alcanzar sugerentes improvisaciones. Resulta ley ineludible del arte coreográfico que los bailarines devengan elemento imprescindible, básico, total: no hay danza sin bailarines. Todas estas circunstancias, maniobras y vericuetos pudimos apreciarlos en esa reunión de imágenes, situaciones escénicas y ejecuciones dancístico-mímicas que fue *Comics* (1989) y en otras obras que forman parte de la ávida lista de ese “autor”, director y “montador” (que siempre es un buen coreógrafo) llamado Raúl Parrao.

La creatividad de Parrao no está peleada con el lícito deseo del organizador ambicioso que constantemente otea el panorama social para hacerse de su público. En *Picnic. Fragmentos de una historia del legendario Hotel X* (recientemente estrenado en la Sala Covarrubias) Parrao quiere ahora ofrecer y trascender las avideces de la que se ha dado en denominar Generación X, cuya justificación existencial (la propia negación de los “valores” esgrimidos por las generaciones que le anteceden pero, sobre todo, la incorporación de los “modos” que ofrece la sociedad contemporánea) sólo puede localizarse en la problemática general de la juventud norteamericana y occidenteuropea. En *Picnic* hay solos y danzas de conjunto que muestran las habilidades coreográficas e interpretativas de varias modalidades: danza-teatro, comedia musical, disco, rock, esbozos de acrobacia, etcétera. Parrao desarrolla su *Picnic* precisamente en las antípodas de

la Generación X y se regodea en la aplicación escénica de los recursos propios de un espectáculo total. Este juego de contrarios lo esgrime precisamente en un culto al metalenguaje que consiste en apoyarse y deshilar, imagen por imagen, cuadros paradigmáticos: *El almuerzo campestre* de Monet y *El cuarto de Vincent* de Van Gogh; y en la paráfrasis de *La metamorfosis* de Kafka y 1984 de Orwell mediante esquemáticos visos interpretativos de William Burroughs. Inspiración netamente intelectual, a cual más. Durante este sorprendente desfile escénico, el espectador percibe dos planos de creatividad (ambos literales): la obsesiva pero obvia necesidad de proclamar la vigencia del lenguaje electrónico en nuestra época y la (también muy directamente expuesta) necesidad de “hacer coreografía”.

A sus ya avanzados treinta y tantos años Raúl Parrao persigue la meta wagneriana del espectáculo total añadiéndole sincronizados esbozos autobiográficos consistentes en hacer girar la “trama” dentro del ámbito clasemediero de esa costumbre infantil mexicana que consiste en ver o, en su caso, leer *comics* cuando se va a hacer popó; o bien busca recrear la elaborada serie de experiencias íntimo-eróticas que acaecen en un baño de vapor; o bien quiere alcanzar la imaginativa “reconstrucción” multidimensional de seres observados o soñados dentro de un cuadro, una película, una fumada de mota, una alucinación onírica, etcétera.

El espectador común y corriente debe dejarse seducir por la ininterrumpida serie de episodios, escenas, danzas, visiones, afluencia de enseres y disfraces, acciones violentas, todas ellas arquitecturas que, presentadas con talento y pulcritud escénica, a veces ahogan o arroban; otras, resultan lentas y reiterativas; algunas estallan en la mente, sin hacer pensar, mientras que las que siguen remiten a las anteriores y permiten retomar el desfile de ofrecimientos e imposiciones. Hay cortes en los que uno debe leer letreros (¡qué tedio: ¡no se supone que las imágenes no requieren de explicaciones, sobre todo cuando funcionan a las mil maravillas el producto audiovisual!). En fin, Raúl Parrao hace una gigantesca coreografía con cuerpos huma-



nos, disfraces, paredes, objetos, luces, gases, ojos, rayos, cuerpos desnudos, actos violentos, poemas.

Por momentos Parrao no logra dominar las escenas y figuraciones simultá-

neas dentro de un escenario de espacios "partidos" y escenografía multidimensional. No obstante, los mejores momentos de la obra son reproducciones en el foro de los cuadros de Monet y Van Gogh.

Picnic es la producción de un ser obsesionado por las posibilidades abiertas del teatro actual —incluyendo las danzas o episodios coreográficos— que aprisiona en sus tareas el más antiguo y efectivo de los objetivos escénicos: fincar una obra monumental, definitiva, a la vez individual y colectiva, apuntalada en bien medidas escenas que conforman una estructura, un haz definido y fantasiosamente verosímil, mediante un lenguaje original claramente orientado. Nos preguntamos entonces si al final nos gustaría volver a ver toda la obra (una hora y cuarenta y cinco minutos, a veces interminables) o si nos inclinaríamos por exigirle a Parrao que idee y monte obras de danza más cortas para tan sensacionales bailarines ("no te alejes tanto de la danza-danza"); o quizás nos gustaría entrevistar a Raúl Parrao, ya maduro director-coreógrafo, capaz de conseguir tan vasta y costosa producción; o nos queda la duda de si a estas alturas de la carrera de Parrao el creador-bailarín piensa más bien en hacer videos, películas o escribir un libro autobiográfico. Todo a la vez: lo que deja en el ánimo, la mente y la sensibilidad una obra apasionada e inquietante. ♦

UNIVERSIDAD DE MÉXICO

REVISTA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

La revista *Universidad de México* da a conocer su nuevo domicilio:

Los Ángeles 1932, número 11,
Colonia Olímpica, C. P. 04710,
Delegación Coyoacán, México, D. F.

Nuevo teléfono para suscripciones y publicidad: 606 69 36

Los teléfonos de la publicación seguirán siendo los mismos:

Dirección: 606 13 91

Coordinación editorial: 666 34 96

Administración: 666 39 72

Fax: 666 37 49

Correo electrónico (E-mail): reunimex@servidor.unam.mx

Internet: <http://www.unam.mx/univmex>

Lo lúdico y sus motivaciones en la obra de René Avilés Fabila

MIGUEL BAUTISTA

Recientemente nos reveló otra de sus motivaciones: la música, arte que le ha inspirado páginas llenas de vivencias a este espíritu selecto y contemporáneo, propio de un hombre sensible. Se trata del amigo René Avilés Fabila (México, D. F., 1940), cuya inquietud por las letras se ha plasmado a través de los años en una obra admirable.

Confesión de parte: lo que me atrae de la obra de René Avilés Fabila viene siendo algo parecido al desparpajo para crear, lo cual, por supuesto, no implica negligencia. Me explico: es un conocido escritor seguidor de lo imaginario que, movido por un sentido riente, ha tejido innumerables historias hilarantes y de humor negro. La intención del autor, que como tal ha de plasmarse adecuadamente en los libros, no podía ser más mundana: dar rienda suelta a su sentido del humor —que brota a borbotones— para otorgar al lector una imagen juguetona del ser humano.

Lo lúdico tiene a veces varias motivaciones. René Avilés Fabila es un cuentista que emplea la literatura como desfogue a su inquietud: encuentra el mundo del “frío pago al contado” abominable, sin calor, sin inteligencia, y por lo tanto reniega de sus valores. En su lugar erige la literatura como el sitio de Eros: la bonanza del espíritu sólo puede venir del amor, el amor a las palabras, a las mujeres y a la imaginación desbocada. El resultado de esta actitud son los cuentos de René en los que con gran rigor formal hay dos constantes: el humorismo y la sátira, ambas al servicio de una posición política bien definida.

Así surge una de sus mejores historias: “La desaparición de Hollywood”, donde el autor urde una visión de escándalo: ve a Hollywood como el último reducto de la libertad y la imaginación humanas, que ha quedado atrás en el tiempo ante el avance de un sistema imperial que todo lo corrompe, ordena e impone. El humanista riente que es René alcanza aquí uno de sus mayores momentos de grandeza, ternura e imaginación. Por eso nosotros diríamos que sus textos más lúcidos están escritos como pequeñas sonatas de la alegría donde lo político no interfiere sino eleva la trama para finalmente darnos una instantánea de la condición humana.

En este contexto, destaca notablemente su estilo literario jocoso. Tiene la mayor importancia en un mundo como éste de la década de los noventas. Frente

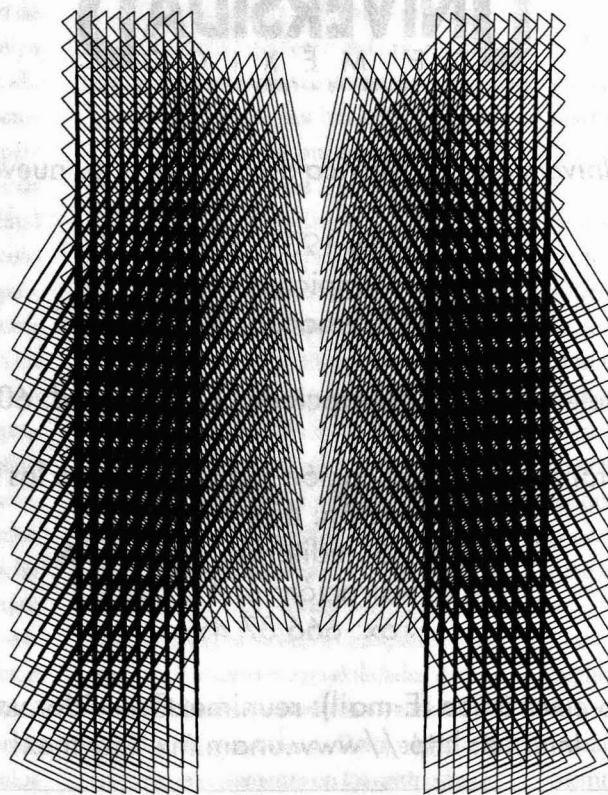
a sus masas de individuos “de mente amonedada”, ante su materialismo, René subraya la vitalidad y lo indispensable que resulta ver a sus personajes en situaciones vitales, concretas y pantagruélicas. Sus mujeres, sus personajes cómicos, no son ajenos al amor, al dinero y a los dolores y decepciones (véase, *Cuentos de hadas amorosas y otros textos*, FCE, 1998). Así revelan sus mejores historias en forma singular aspectos de la condición humana.

Sus seres humanos, fantásticos y endriagos proyectados al libro (véase *Fantasías en carrusel*, Praxis, 1996), padecen por eso mismo los achaques de la fantasía más desbocada de un autor que no hace concesiones en este plano...

Por otro lado, sobresale en nuestro ambiente René Avilés Fabila por su posición política, más notable a medida que el medio literario se degrada y se apoltrona. Al ser un crítico de izquierda, un cronista de la vida intelectual y política mexicana en la era de cambios importantes, el autor de *Recondanzas I* exhibe una fortaleza de autor comprometido con su ideario de notable raigambre humanista y una congruencia importante con su trayectoria de muchos años.

Un escritor aporta algo a su medio intelectual y artístico, siempre que esté dotado y preparado para ello. René ha expresado en sus libros de cuentos una tendencia heterodoxa dentro de la literatura mexicana: el sentido del humor hecho historias y narrativa de intención lúdica y crítica, como mensaje de alegría y gozo en medio de un ambiente de significaciones varias, pero donde el sentido del humor no es fuerte.

Se le puede objetar, quizás, cierto apasionamiento en su radicalismo y puntos de vista, pero bien visto ello son gajes del oficio de un escritor excelente. Nos felicitamos, pues, por ser lectores de antiguo de este autor que vive y que crea movido por ideales y motivos de un enamorado de su profesión: reflejar con gracia y mordacidad la realidad de nuestro tiempo. ♦



Arcadio Artís (Ciudad de México, 1946). Arquitecto por la UNAM. Entre su obra arquitectónica se cuentan las salas Miguel Covarrubias y Carlos Chávez, los cines José Revueltas y Julio Bracho, los teatros Juan Ruiz de Alarcón y Sor Juana Inés de la Cruz y la sala de conciertos Nezahualcóyotl del Centro Cultural Universitario, así como la biblioteca de la Facultad de Ciencias, todos ellos situados en la Ciudad Universitaria de la UNAM. Ha presentado dos exposiciones individuales de pintura y escultura: Galería del Centro Libanés (1995) y Centro de Información y Divulgación Amoxcalli (Facultad de Ciencias, 1996).

Michael Barot (Schaffhausen, Suiza, 1966). Radica en México desde 1994. Obtuvo el diploma en matemáticas en la Universidad de Zürich y el doctorado en la misma especialidad en la UNAM, donde es investigador del Instituto de Matemáticas.
barot@matem.unam.mx

Miguel Bautista. Véanse los números 508, 514, 521, 534-535 y 570-571.

Alberto Blanco. Colaboraciones cuyas aparecen en los números 511, 521, 528-529, 536-537, 551, 562, 573-574 y 575.

Javier Bracho (Ciudad de México, 1954). Licenciado en matemáticas por la UNAM y doctor en la misma especialidad por el Instituto Tecnológico de Massachusetts. En 1993 obtuvo la Distinción Universidad Nacional para Jóvenes Académicos en el área de docencia en ciencias exactas. Actualmente es jefe de la Unidad Cuernavaca del Instituto de Matemáticas de nuestra casa de estudios. Es coautor, junto con Juan Sandoval, de la patente de los caleidoscopios del espacio infinito (1995) y autor del libro *¿En qué espacio vivimos?* (FCE).
jbracho@matem.unam.mx

J. Andrés Christen (Ciudad de México, 1966). Licenciado en matemáticas por la

UNAM y doctor en la misma especialidad por la Universidad de Nottingham, Inglaterra. Está adscrito al Sistema Nacional de Investigadores. Actualmente es investigador en la Unidad Morelia del Instituto de Matemáticas de nuestra casa de estudios y profesor en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
jac@matem.unam.mx

Delia Covi Druetta (Córdoba, Argentina, 1947). Nacionalizada mexicana en 1984. Licenciada en periodismo y ciencias de la información con posgrado en enseñanza de la comunicación por la Universidad Católica Argentina, maestra en ciencias de la comunicación y doctora en estudios latinoamericanos por la UNAM. Está adscrita al Sistema Nacional de Investigadores. En nuestra casa de estudios fue secretaria académica de la licenciatura en ciencias de la comunicación en la Facultad de Ciencias Políticas y Sociales, donde actualmente es profesora-investigadora. Es autora de *Ser joven a fin de siglo. Influencia de la televisión en las opiniones políticas de los jóvenes* (UNAM) y *Tecnología satelital para la enseñanza* (Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa), entre otros libros.
covi@servidor.unam.mx

Alberto Dallal. Es director de *Universidad de México* desde enero de 1993. Su colaboración más reciente aparece en el número 575. Se halla en prensa la cuarta parte de su obra *La danza en México*.
dallal@servidor.unam.mx

Manuel Felguérez (Valparaíso, Zacatecas, 1928). Inició sus estudios de arte en la Escuela Nacional de Artes Plásticas (Academia de San Carlos) en 1948. Fue discípulo de Ossip Zadkine en la Academia de la Grande Chaumier de París. Fue investigador en el Instituto de Investigaciones Estéticas de la UNAM e investigador huésped en la Universidad de Harvard. Estuvo beca-

do por el gobierno francés (1954) y por la Fundación Guggenheim (1975). Es creador emérito del Sistema Nacional de Creadores y miembro de número de la Academia de Artes de México. En 1988 obtuvo el Premio Nacional de Artes. En su estado natal se inauguró el Museo de Arte Abstracto Manuel Felguérez en 1998. Entre sus exposiciones individuales encontramos la presentada en el Museo Rufino Tamayo (Ciudad de México, 1997) y *Manuel Felguérez: obra reciente* (Universidad de las Américas, Cholula, Puebla, 1999).

Rafael Fernández Flores (Ciudad de México, 1951). Licenciado, maestro y doctor en física por la UNAM y doctor ingeniero por el Laboratorio de Mecánica de Fluidos de Toulouse, Francia. Fue asesor técnico del Instituto de Investigaciones Eléctricas. En nuestra casa de estudios es director de Cómputo para la Investigación en la Dirección General de Servicios de Cómputo Académico y profesor de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, la Facultad de Química y la Facultad de Ingeniería. En 1990 publicó *La ciencia es un juego de niños* (Diana).
rafaelf@servidor.unam.mx

J. Rafael Martínez (Ciudad de México, 1950). Licenciado en física por la UNAM y master in philosophy por The Open University de la Gran Bretaña. En nuestra casa de estudios trabajó en el área de sistemas dinámicos y fenómenos críticos del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, donde fue secretario de Asuntos del Personal Académico y secretario general. Es codirector de la serie *Mathema*, en la que se publican textos clásicos en la historia del pensamiento científico, y forma parte del cuerpo editorial de *Sciences et Techniques en Perspective*.
enriquez@servidor.unam.mx

Rosa Margarita Maupomé (Veracruz, Veracruz, 1955). Licenciada en ciencias de

la comunicación y maestra en periodismo por la Universidad de Varsovia (Polonia). Realizó estudios de física en la UNAM y en la Universidad de Georgetown (Washington D. C.) y de astronomía en la Universidad Jagielona (Cracovia, Polonia). Fue fotoreportera de la revista *Perspektywy* de Varsovia. Actualmente está a cargo del Taller de Fotografía de la Escuela Nacional Preparatoria, plantel José Vasconcelos, de nuestra casa de estudios.

Max Neumann Coto (Caracas, Venezuela, 1962). Mexicano por nacimiento. Licenciado en matemáticas y maestro en ciencias por la UNAM; doctor en matemáticas por la Universidad de Michigan. Es investigador en el Instituto de Matemáticas y profesor en la Facultad de Ciencias de nuestra casa de estudios.
max@matem.unam.mx

Laura Ortiz Bobadilla (Ciudad de México, 1961). Licenciada en matemáticas y maestra en ciencias por la UNAM; doctora en matemáticas por el Instituto de Matemáticas V. A. Steklov de la Academia de Ciencias Rusa. Está adscrita al Sistema Nacional de Investigadores. En nuestra casa de estudios es investigadora del Instituto de Matemáticas y profesora en la Facultad de Ciencias.
laura@matem.unam.mx

José Antonio de la Peña. Colaboraciones suyas aparecen en los números 540 y 566. Actualmente es director del Instituto de Matemáticas de la UNAM y tesorero de la Academia Mexicana de Ciencias.
jap@penelope.matem.unam.mx

Carlos Prieto (Ciudad de México, 1948). Físico, matemático y maestro en matemáticas por la UNAM y doctor en la misma especialidad por la Universidad de Heidelberg, Alemania, donde obtuvo la mención *magna cum laude*. Fue presidente de la Sociedad Matemática Mexicana. Está adscrito al Sistema Nacional de Investigadores. Es investigador del Instituto de Matemáticas y profesor de la Facultad de Ciencias de nuestra casa de estudios. Ha sido profesor invitado en las universidades de Puebla, Baja California Sur, Minnesota, Heidelberg y de varias de Polonia. Es autor de *Topología algebraica. Un enfoque homotópico* (UNAM/McGraw-Hill/Interamericana), escrito en colaboración con M. Aguilar y S. Gitler.
cprieto@matem.unam.mx

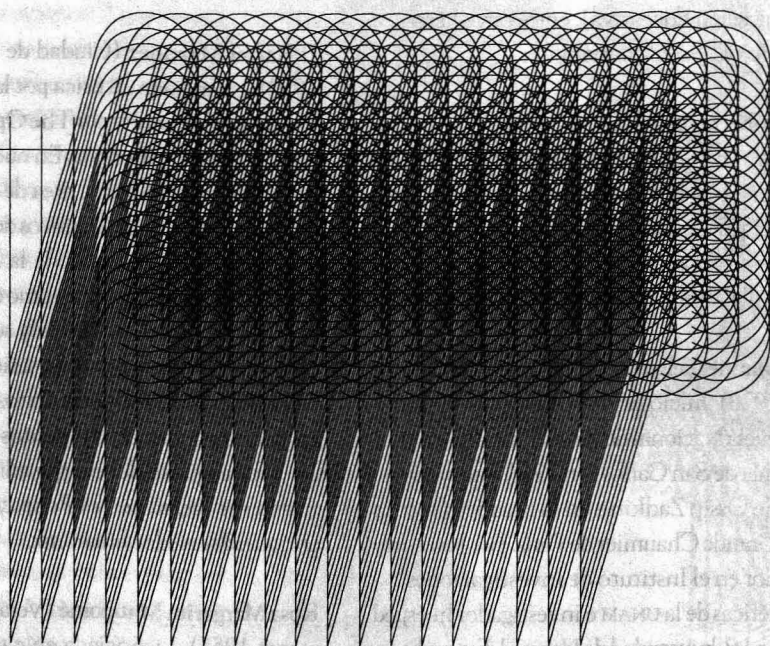
Sofía Reding Blase (Monterrey, Nuevo León, 1967). Licenciada en antropología social por la Escuela Nacional de Antropología e Historia y maestra en estudios latinoamericanos por la UNAM, donde actualmente realiza el doctorado en la misma especialidad. Es profesora en la Escuela Na-

cional de Antropología e Historia, en la Universidad Intercontinental y en el Instituto Tecnológico Autónomo de México. Es autora de *El buen salvaje* (UNAM) y *Párrocos y misioneros: precursores coloniales del pensamiento antropológico latinoamericano* (Ediciones Subirana, en prensa).
reding@servidor.unam.mx

Adolfo Sánchez Valenzuela (Ciudad de México, 1956). Licenciado y maestro en física por la UNAM y doctor en matemáticas por la Universidad de Harvard. En nuestra casa de estudios fue investigador del Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas y actualmente lo es del Centro de Investigación en Matemáticas de Guanajuato.
adolfo@cimat.mx

Elías Trabulse. Colaboró en el número 559. Ha sido catedrático de la UNAM, la Universidad Iberoamericana y el Instituto Tecnológico Autónomo de México. Es miembro de la History of Science Society, de la Sociedad Mexicana de Historia de la Ciencia y de la Tecnología, de la Sociedad Mexicana de Historia y Filosofía de la Medicina, del seminario Problemas Científicos y Filosóficos de la UNAM, del consejo consultivo del Centro de Estudios de Historia de México de Condumex y del consejo de Fomento Cultural Banamex. Algunos de sus libros son *La ciencia y la tecnología en México* (Secretaría de Relaciones Exteriores), *Ciencia mexicana. Estudios históricos* (Textos Diversos Ediciones) y *Ciencia y tecnología en el nuevo mundo* (RCE).

Iván Trujillo (Villahermosa, Tabasco, 1954). Biólogo por la UNAM, donde también realizó estudios de cinematografía en el Centro Universitario de Estudios Cinematográficos. Desde 1989 es director general de Actividades Cinematográficas de nuestra casa de estudios. En 1985 obtuvo el Ariel al mejor cortometraje documental con la película *Monarca adivinanzas para siempre*. Actualmente es vicepresidente de la Federación Internacional de Archivos Fílmicos y miembro de diferentes asociaciones internacionales relacionadas con la producción y difusión de cine y video científico.
trujillo@servidor.unam.mx



NOVEDADES EDITORIALES COORDINACIÓN DE HUMANIDADES UNAM

ANTROPOLOGÍA E HISTORIA

La caza, la pesca y la recolección: etnoarqueología del modo de subsistencia lacustre en las ciénegas del alto Lerma

Yoko Sugiura Yamamoto

Instituto de Investigaciones Antropológicas, 1997

Población, subsistencia y medio ambiente en San Lorenzo Tenochtitlán

Ann Cyphers (coord.)

Instituto de Investigaciones Antropológicas, 1997

Antropología visual

Ana María Salazar Peralta (coord.)

Instituto de Investigaciones Antropológicas, 1997

Dos americanos, dos pensamientos.

Carlos Singüenza y Góngora y Cotton Mather

Alicia Mayer

Instituto de Investigaciones Históricas, 1998

Cofradías, capellanías y obras pías en la América colonial

María del Pilar Martínez López-Cano y Gisela von Wobeser

Instituto de Investigaciones Históricas, 1998

La intervención francesa a través de la correspondencia de sus mariscales

Ernesto de la Torre Villar

Instituto de Investigaciones Históricas/Archivo General
de la Nación, 1998

Arte en la lengua maya y otros escritos

Juan Coronel

Instituto de Investigaciones Filológicas-Centro de Estudios
Mayas, 1998

DERECHO

Las comisiones parlamentarias de investigación como órganos de control

Cecilia Judith Mora Donato

Cámara de Diputados, LVII Legislatura/Instituto
de Investigaciones Jurídicas, 1998

El voto de los mexicanos en el extranjero

Jorge Carpizo y Diego Valadés

Instituto de Investigaciones Jurídicas, 1998

La reforma al poder legislativo en México

Amador Rodríguez Lozano

Centro de Estudios Constitucionales México-
Centroamérica/Instituto de Investigaciones Jurídicas, 1998

La construcción del derecho: métodos y técnicas de investigación

Jorge Alberto González Galván

Instituto de Investigaciones Jurídicas, 1998

La ciencia del derecho

Varios autores

Instituto de Investigaciones Jurídicas, 1998

Para informes y adquisiciones dirigirse a la Coordinación de Humanidades, Circuito Maestro Mario de la Cueva,
Ciudad de la Investigación en Humanidades, Ciudad Universitaria, C. P. 04510, México, D. F. Tel. 622 75 88, Fax 622 75 90.

Correo electrónico (E-mail): jrios@servidor.unam.mx



**EN EL 1060 DE AM
CONTAMOS CON UN EQUIPO
PROFESIONAL DE LA NOTICIA**



**INFORMACIÓN NACIONAL
E INTERNACIONAL**

LUNES A VIERNES

FIN DE SEMANA

Mañana 08:00
Tarde 14:30
Noche 20:30

Sabado 14:30
Domingo 14:30

www.cnca.gob.mx
xeenoti@conaculta.gob.mx

CONACULTA
RADIO EDUCACIÓN



PUBLICACIONES UNAM

De la economía ambiental al desarrollo sustentable (Alternativas frente a la crisis de gestión ambiental)

Varios autores

Américo Saldivar V.: Coordinación
Facultad de Economía

Programa Universitario de Medio Ambiente, Coordinación de Vinculación
1998, 317 págs.

El hombre escorzado. Un estudio sobre el concepto de eslabón perdido en evolución humana

José Luis Vera

Instituto de Investigaciones Antropológicas
1998, 179 págs.

La tecnología como instrumento de poder

Ana Esther Cacaña: Coordinación

Raúl Ornelas, Leticia Palma, Octavio Rosaslandia y Eudor Velasco:
Colaboración

Instituto de Investigaciones Económicas
Dirección General de Asuntos del Personal Académico
1998, 309 págs.

Jaime Labastida. Voz del autor

Antonio Marquet: Presentación

Coordinación de Difusión Cultural, Dirección de Literatura
Colección Voz viva de México
2ª edición: 1998

Informes: Dirección General de Publicaciones y Fomento Editorial, Av. del IMAN Num. 5, Ciudad Universitaria,
C.P. 04510, México D.F., Tel. 622 65 90 Tel. y Fax. 622 65 82
<http://biblioteca.unam.mx/libros> e-mail: plmeco@servidor.unam.mx
Ventas: Red de librerías UNAM

CIENCIA

Todos los viernes a las 20:30 hrs.

CIENCIA 2
LA CONACULTA



La cultura también se ve
Canal de televisión por cable en México 122 1998 en español

VISITENOS

BIENVENIDOS

Porque su vista es lo más importante...

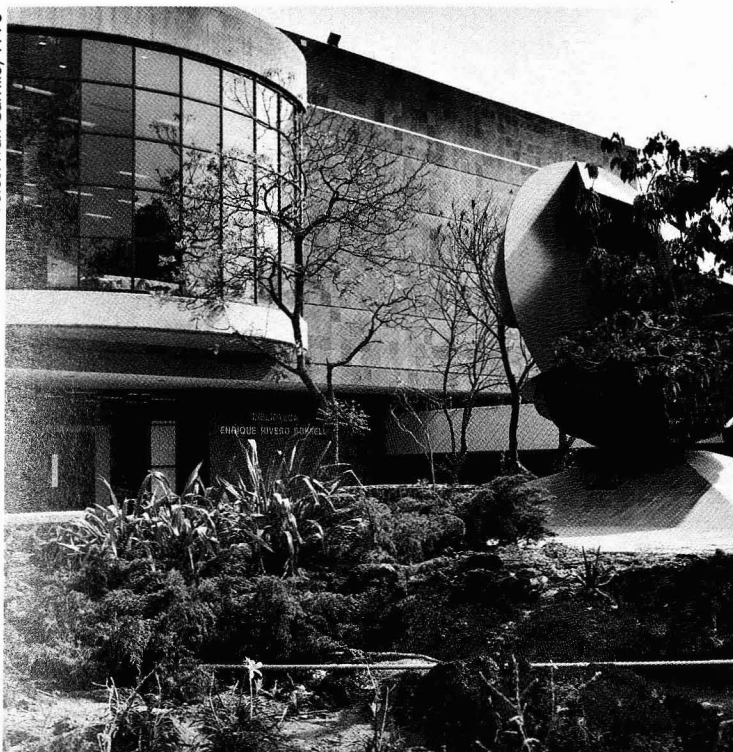


Ahora en su tienda UNAM

**OPTICAS
LUX**

Confianza a la vista.

Fotos: Iván Carrillo, 1998



Biblioteca de la División de Ciencias Básicas de la Facultad de Ingeniería



Biblioteca del Instituto de Ciencias Nucleares

SISTEMA BIBLIOTECARIO DE LA UNAM

La Universidad Nacional Autónoma de México, con el objeto de apoyar sus funciones docentes, de investigación y de difusión de la cultura, cuenta con un total de 141 bibliotecas: 90 en la Ciudad Universitaria, 36 en el área metropolitana y 15 en otras partes de la República.

El objetivo fundamental de este sistema bibliotecario es resguardar y poner al servicio de la comunidad diversas colecciones bibliohemero-gráficas. Actualmente, su acervo consta de 2 411 159 títulos, mismos que son avalados por 9 556 833 piezas documentales, lo que da una idea de la riqueza documental disponible.

Página electrónica en Internet
de la Dirección General
de Bibliotecas:

www.dgbiblio.unam.mx

9 770185 133008

