# La cultura de las matemáticas

José Antonio de la Peña

***Las matemáticas en el siglo* XX**

> *¡El infinito! Ningún otro problema ha conmovido de manera más profunda el espíritu del hombre; ninguna otra idea ha estimulado más su intelecto.*
>
> *David Hilbert*

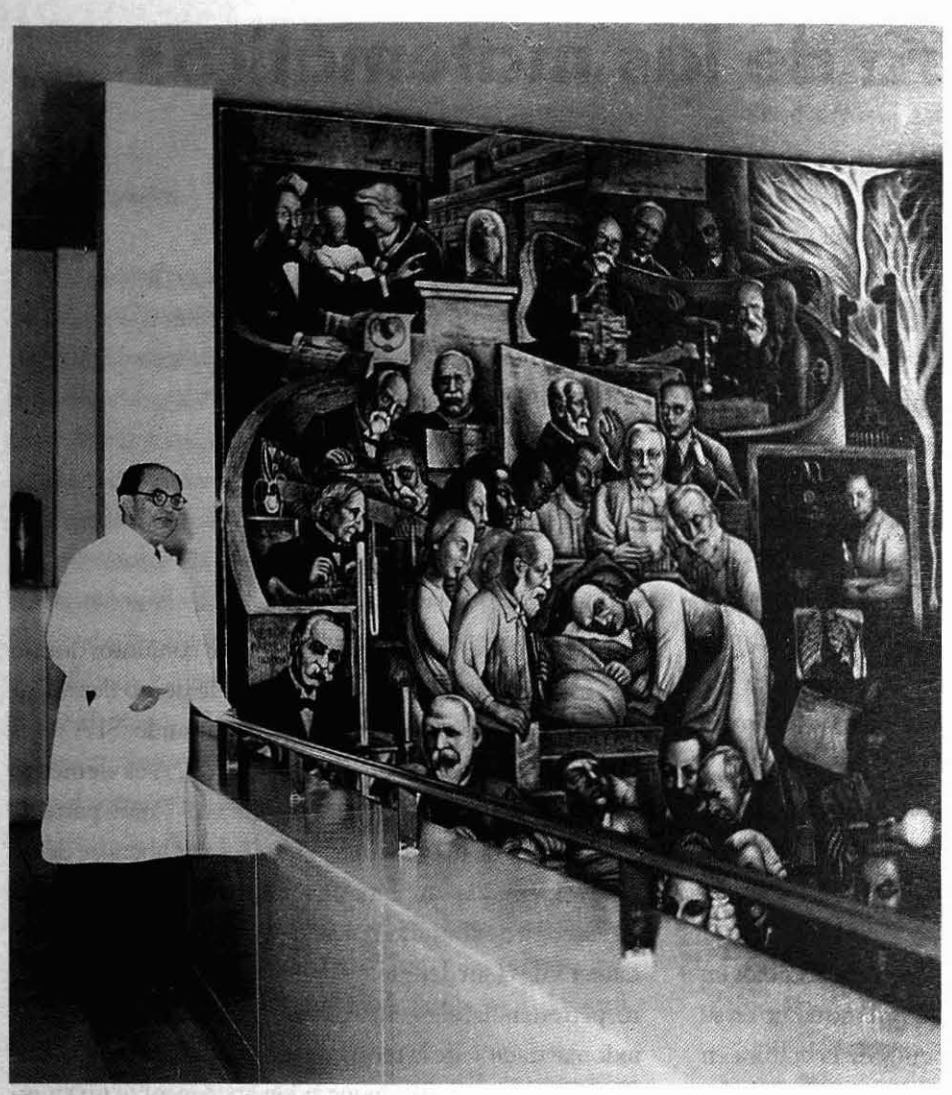
El siglo que termina ha presenciado profundos cambios en las matemáticas, tanto en su desarrollo interno como en su significado en tanto parte de la ciencia y de la cultura en general. Comenzaremos haciendo un breve repaso de las aportaciones más importantes de las matemáticas en la presente centuria.

Una de las aportaciones filosóficamente más significativas en las matemáticas la representa la introducción de la teoría de los conjuntos. Desde 1874 y durante los primeros años del siglo XX, Georg Cantor inicia el estudio de lo que después se convertiría en la teoría de conjuntos y que entre sus aportaciones fundamentales se cuenta la de haber logrado la comprensión clara de los números infinitos. En este enfoque, un número es la clase de equivalencia de todos los conjuntos para los que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre sus elementos y los de un conjunto dado. De esta forma es posible demostrar que el número infinito más pequeño es el que corresponde a los números naturales y también, para sorpresa aun de los matemáticos, que hay una cantidad infinita de números infinitos diferentes.

A finales del siglo XIX se descubren las primeras paradojas de la teoría de conjuntos, sobre todo la referente al "conjunto de todos los conjuntos", de Bertrand Russell: consideremos el conjunto A de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. Si A es elemento de A, entonces no es elemento de A, lo cual es absurdo. Si A no es elemento de A, entonces, por definición, A es elemento de A, ¡hecho que resulta absurdo otra vez! Como parte de los esfuerzos de matemáticos y filósofos por liberarse de estos problemas se emprenden intentos de axiomatización de la teoría de conjuntos, aceptando como conceptos fundamentales (sin definición) términos tales como conjunto, pertenencia, elemento y otros. Los primeros ensayos de axiomatización de la teoría de conjuntos parecían promisorios. Tanto, que el enfoque axiomático recobró una fuerza inusitada en las matemáticas y hacía confiar a grandes matemáticos como Hilbert en la posibilidad de axiomatizarlas por completo.

En 1931, el joven austriaco de 28 años Kurt Gödel se encarga de acabar con la esperanza formalista: muestra que no puede encontrarse un conjunto finito de axiomas que implique todos los resultados verdaderos de las matemáticas. Gödel demuestra que cualquier conjunto finito de axiomas que impliquen los axiomas de Peano y que sea consistente (esto es, que no lleve a contradicciones) determina un sistema formal que no es completo, es decir respecto del cual siempre se podrán encontrar afirmaciones cuya verdad o falsedad no puede demostrarse sólo mediante los axiomas y las reglas de inferencia lógica.

Para algunos matemáticos y otros científicos, el descubrimiento de Gödel daba un golpe devastador a la ilusión profunda de los matemáticos: conocer los fundamentos últimos de su disciplina. Pero el efecto fue muy distinto. Las matemáticas siguieron progresando rápidamente sin preocuparse mucho por las cuestiones de fundamentos.



Ignacio Chávez junto a mural de Diego Rivera, Instituto Nacional de Cardiología, Ciudad de México, *ca.* 1975

Desde entonces y hasta la actualidad, la mayor parte de los matemáticos adopta una actitud "ingenua" respecto a la teoría de conjuntos: la usan continuamente a sabiendas de que mientras no se invoquen conjuntos grandes o "extraños" no surgirán problemas.

Diversas ramas de las matemáticas se iniciaron y florecieron durante el siglo XX, y ahora resultan fundamentales en la disciplina: el álgebra abstracta, la teoría de la medida, la topología y sus derivaciones recientes como la teoría de catástrofes y la teoría del caos. Pero quizás el avance de significado y repercusiones más profundos es el de la teoría y uso de las computadoras.

Varias de estas ramas de las matemáticas tuvieron su origen en el trabajo de las escuelas más fuertes de principios del siglo: la alemana y la francesa. En Alemania la figura dominante era David Hilbert y su punto de vista formalista predominaba, de forma que no es sorprendente que la formalización del álgebra abstracta se llevara a cabo bajo su influencia. Así, en 1929, la mujer más destacada de la historia de las matemáticas, Emmy Noether, introduce las nociones de homomorfismo de grupo y de bimódulo, así como los famosos teoremas de isomorfía. En Francia la personalidad más destacada a principios de siglo era Henri Poincaré, cuyo método de trabajo era más intuitivo e imaginativo. A partir de su trabajo se desarrollará posteriormente la topología y en el largo plazo las teorías de catástrofes y del caos. Para la topología lo que importa es la forma general de los espacios, no sus propiedades analíticas. Por ejemplo, una papa y una esfera son la misma cosa, pues una puede ser deformada en la otra sin romper la superficie.

Probablemente los progresos más trascendentes, o al menos mejor conocidos, en las matemáticas de la última mitad de siglo sean los siguientes:

### *La teoría de catástrofes*

A finales del siglo XIX, Poincaré había relacionado el cálculo con la naciente topología para intentar resolver el problema de la estabilidad del sistema solar. Esta aproximación al problema reviste una profunda originalidad, pues la dinámica de los cuerpos se había definido de una manera firmemente cuantitativa en el trabajo de Newton. Sin embargo, una vez que el número de cuerpos que interaccionan es mayor que dos, la resolución exacta de las ecuaciones de la dinámica de Newton se vuelve imposible e incluso encontrar aproximaciones constituye un problema en extremo complicado.

Una catástrofe en el sentido de Thom es cualquier transición abrupta que ocurre cuando un sistema pasa de un estado estable a otro. La catástrofe es el salto de un estado a otro. Por ejemplo, se presenta una catástrofe en el hielo cuando éste se funde, en la presión de un balón que se infla cuando se revienta, en la actividad eléctrica del cerebro cuando se despierta.

### *Teoría de nudos*

Un nudo es una curva cerrada en el espacio de tres dimensiones. Al dibujar un nudo en una hoja de papel, un cruce en el espacio se indica como una pequeña discontinuidad en la parte del nudo que pasa por detrás, según el punto de vista del observador.

Los nudos interesan a los matemáticos desde hace tiempo, pero no fue hasta 1984 cuando el joven matemático Vaughan Jones introdujo un nuevo polinomio como invariante de los nudos, que, además de distinguir nudos diferentes de una manera mucho más sutil que polinomios definidos anteriormente, diferenciaba también un nudo de su imagen especular. La principal sorpresa del descubrimiento era que Jones provenía de un área de las matemáticas en principio por completo ajena a la teoría de espacios de dimensiones bajas: la teoría de álgebras de von Neumann, que tiene su origen en la mecánica cuántica.

La teoría de nudos cobró una importancia especial en el estudio de moléculas de ácido desoxirribonucleico (ADN), que contienen la información genética que gobierna la vida. En general, las tiras de ADN pueden formar nudos muy complicados, como lo muestran fotografías electrónicas. Un hecho impresionante al respecto es la existencia de enzimas que permiten a un nudo de ADN transformarse en otro al hacer pasar la parte inferior de un cruce hacia arriba, de manera que el nudo así obtenido puede no ser equivalente al original.

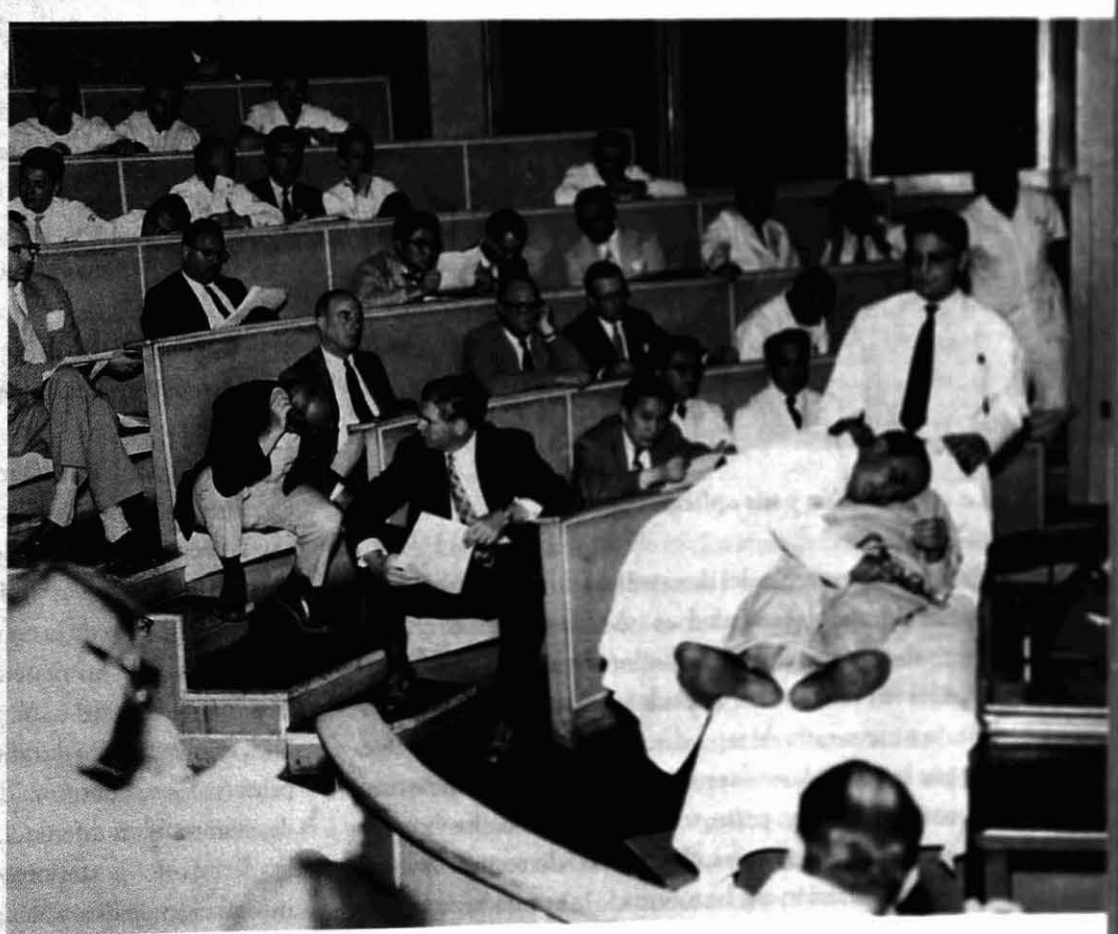
### *La teoría del caos*

A principios del siglo, científicos como el matemático Poincaré y el físico James Clerk Maxwell se daban cuenta de que había fenómenos tan exquisitamente sensibles a los cambios de condiciones iniciales, que para la gente era más fácil pensar que las consecuencias visibles eran producto del azar. La investigación matemática indicaba, por el contrario, que sistemas gobernados por leyes físicas pueden manifestar cambios de una manera irregular y difícil de predecir, situación que ahora se denomina de caos.

La teoría del caos estudia fenómenos regidos por leyes matemáticas perfectamente definidas, pero que presentan ciertas características especiales. En este sentido, los fenómenos estudiados por el caos son deterministas y ordenados, pero difíciles de predecir. Con la llegada de las computadoras fue posible comenzar a estudiar estos fenómenos con métodos numéricos donde es necesario efectuar cálculos cuya realización hubiera tomado antes vidas enteras.

### *El Último Teorema de Fermat*

Las matemáticas de la Grecia clásica están profundamente marcadas por el trabajo de Pitágoras. En su libro *Aritmética*, el matemático griego Diofanto estudia cuidadosamente el Teorema de Pitágoras y se pregunta por aquellos triángulos rectángulos cuyos lados tienen longitud entera. A me-



Ignacio Chávez imparte cátedra en la Universidad Nacional, Ciudad de México, ca. 1975

Ignacio Chávez junto a mural de Diego Rivera, Instituto Nacional de Cardiología, Ciudad de México, *ca.* 1975

Desde entonces y hasta la actualidad, la mayor parte de los matemáticos adopta una actitud "ingenua" respecto a la teoría de conjuntos: la usan continuamente a sabiendas de que mientras no se invoquen conjuntos grandes o "extraños" no surgirán problemas.

Diversas ramas de las matemáticas se iniciaron y florecieron durante el siglo XX, y ahora resultan fundamentales en la disciplina: el álgebra abstracta, la teoría de la medida, la topología y sus derivaciones recientes como la teoría de catástrofes y la teoría del caos. Pero quizás el avance de significado y repercusiones más profundos es el de la teoría y uso de las computadoras.

Varias de estas ramas de las matemáticas tuvieron su origen en el trabajo de las escuelas más fuertes de principios del siglo: la alemana y la francesa. En Alemania la figura dominante era David Hilbert y su punto de vista formalista predominaba, de forma que no es sorprendente que la formalización del álgebra abstracta se llevara a cabo bajo su influencia. Así, en 1929, la mujer más destacada de la historia de las matemáticas, Emmy Noether, introduce las nociones de homomorfismo de grupo y de bimódulo, así como los famosos teoremas de isomorfía. En Francia la personalidad más destacada a principios de siglo era Henri Poincaré, cuyo método de trabajo era más intuitivo e imaginativo. A partir de su trabajo se desarrollará posteriormente la topología y en el largo plazo las teorías de catástrofes y del caos. Para la topología lo que importa es la forma general de los espacios, no sus propiedades analíticas. Por ejemplo, una papa y una esfera son la misma cosa, pues una puede ser deformada en la otra sin romper la superficie.

Probablemente los progresos más trascendentes, o al menos mejor conocidos, en las matemáticas de la última mitad de siglo sean los siguientes:

### *La teoría de catástrofes*

A finales del siglo XIX, Poincaré había relacionado el cálculo con la naciente topología para intentar resolver el problema de la estabilidad del sistema solar. Esta aproximación al problema reviste una profunda originalidad, pues la dinámica de los cuerpos se había definido de una manera firmemente cuantitativa en el trabajo de Newton. Sin embargo, una vez que el número de cuerpos que interaccionan es mayor que dos, la resolución exacta de las ecuaciones de la dinámica de Newton se vuelve imposible e incluso encontrar aproximaciones constituye un problema en extremo complicado.

Una catástrofe en el sentido de Thom es cualquier transición abrupta que ocurre cuando un sistema pasa de un estado estable a otro. La catástrofe es el salto de un estado a otro. Por ejemplo, se presenta una catástrofe en el hielo cuando éste se funde, en la presión de un balón que se infla cuando se revienta, en la actividad eléctrica del cerebro cuando se despierta.

### *Teoría de nudos*

Un nudo es una curva cerrada en el espacio de tres dimensiones. Al dibujar un nudo en una hoja de papel, un cruce en el espacio se indica como una pequeña discontinuidad en la parte del nudo que pasa por detrás, según el punto de vista del observador.

Los nudos interesan a los matemáticos desde hace tiempo, pero no fue hasta 1984 cuando el joven matemático Vaughan Jones introdujo un nuevo polinomio como invariante de los nudos, que, además de distinguir nudos diferentes de una manera mucho más sutil que polinomios definidos anteriormente, diferenciaba también un nudo de su imagen especular. La principal sorpresa del descubrimiento era que Jones provenía de un área de las matemáticas en principio por completo ajena a la teoría de espacios de dimensiones bajas: la teoría de álgebras de von Neumann, que tiene su origen en la mecánica cuántica.

La teoría de nudos cobró una importancia especial en el estudio de moléculas de ácido desoxirribonucleico (ADN), que contienen la información genética que gobierna la vida. En general, las tiras de ADN pueden formar nudos muy complicados, como lo muestran fotografías electrónicas. Un hecho impresionante al respecto es la existencia de enzimas que permiten a un nudo de ADN transformarse en otro al hacer pasar la parte inferior de un cruce hacia arriba, de manera que el nudo así obtenido puede no ser equivalente al original.

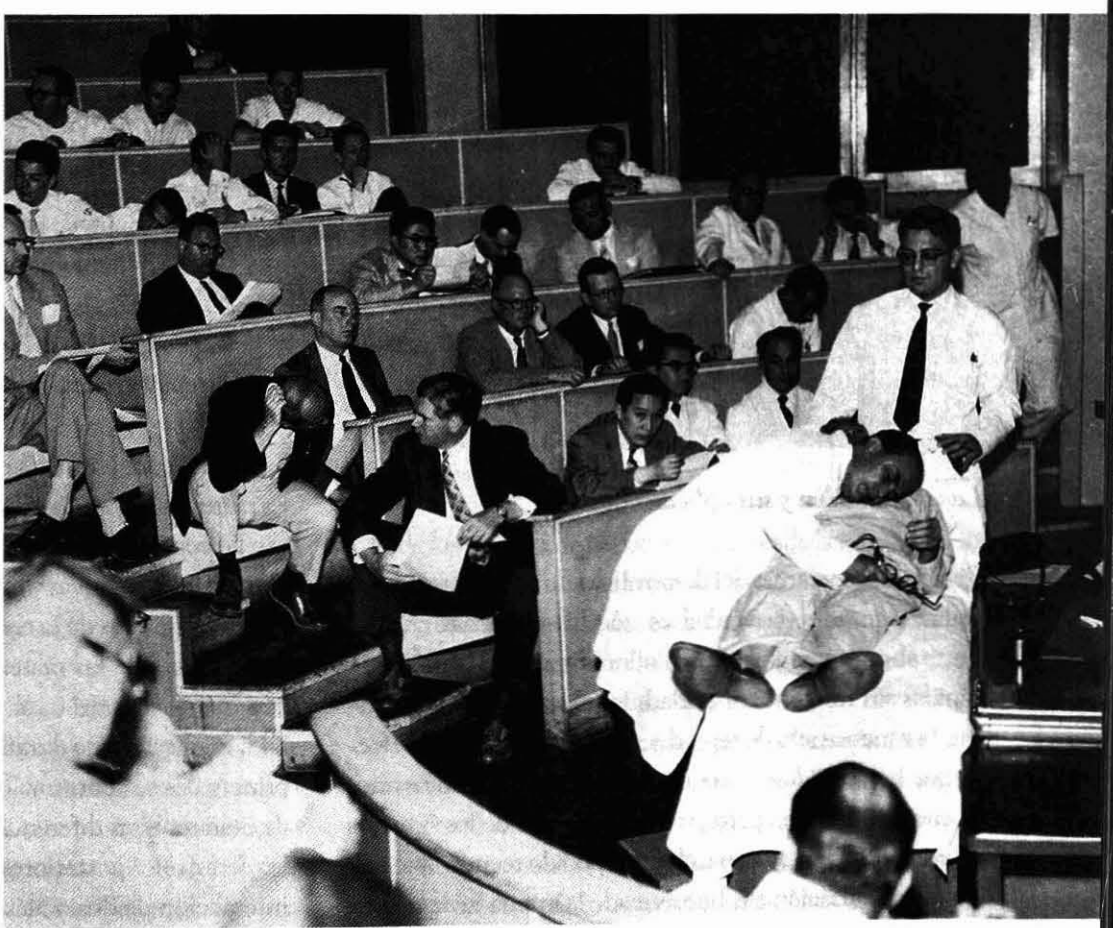
### *La teoría del caos*

A principios del siglo, científicos como el matemático Poincaré y el físico James Clerk Maxwell se daban cuenta de que había fenómenos tan exquisitamente sensibles a los cambios de condiciones iniciales, que para la gente era más fácil pensar que las consecuencias visibles eran producto del azar. La investigación matemática indicaba, por el contrario, que sistemas gobernados por leyes físicas pueden manifestar cambios de una manera irregular y difícil de predecir, situación que ahora se denomina de caos.

La teoría del caos estudia fenómenos regidos por leyes matemáticas perfectamente definidas, pero que presentan ciertas características especiales. En este sentido, los fenómenos estudiados por el caos son deterministas y ordenados, pero difíciles de predecir. Con la llegada de las computadoras fue posible comenzar a estudiar estos fenómenos con métodos numéricos donde es necesario efectuar cálculos cuya realización hubiera tomado antes vidas enteras.

### *El Último Teorema de Fermat*

Las matemáticas de la Grecia clásica están profundamente marcadas por el trabajo de Pitágoras. En su libro *Aritmética*, el matemático griego Diofanto estudia cuidadosamente el Teorema de Pitágoras y se pregunta por aquellos triángulos rectángulos cuyos lados tienen longitud entera. A me-



Ignacio Chávez imparte cátedra en la Universidad Nacional, Ciudad de México, *ca.* 1975

diados del siglo XVII, el matemático aficionado Pierre Fermat leía este libro y conjeturaba que, para ningún número $n$ mayor que 2, era posible hallar tripletas de números enteros $(a, b, c)$ de forma que la suma de las potencias $n$-ésimas de $a$ y de $b$ sea igual a la potencia $n$-ésima de $c$.

Al paso de los años, algunos de los matemáticos más importantes trataron vanamente de probar ese resultado, pero con su esfuerzo obtuvieron muchas otras cosas. Euler demostró que el caso $n = 3$ tampoco tenía soluciones. Para el principio del siglo XIX, ya se sabía que el Teorema de Fermat también era correcto en los casos $n = 5$ y $n = 7$. En 1964, el teorema había sido demostrado en cuanto a los números pares y los números menores que 25 013. Intentos de resolver este problema dieron inicio a ramas completas de las matemáticas como la teoría analítica de los números y la teoría de ideales en anillos.

Hubo tantos intentos fallidos de demostrar el referido teorema que cuando finalmente la solución llegó fue una sorpresa para todo mundo. Tal es la fama de este problema que los periódicos de todas partes publicaron notas informando que finalmente se había encontrado una demostración del mismo. En el verano de 1993, Andrew Wiles, profesor de Cambridge, Inglaterra, anunció que tenía una demostración contenida en un manuscrito de más de doscientas páginas y que había necesitado siete años en completar.

La demostración de Wiles del Último Teorema de Fermat es una muestra del grado de complejidad y profundidad que han alcanzado las matemáticas. Mientras que el problema de Fermat requiere una línea para escribirse y cualquier estudiante de secundaria puede entenderlo, la demostración requiere técnicas y resultados de álgebra y geometría que se desarrollaron a lo largo de siglos.

### *La computación y sus aplicaciones*

Si bien las esperanzas del desarrollo de la computación son todavía grandes, la verdad es que las máquinas creadas hasta ahora son simples calculadoras impresionantemente rápidas sin ninguna capacidad de razonamiento o aprendizaje y menos aún de reproducción. Sin embargo, el efecto que han tenido en las matemáticas de los últimos años es enorme. Por una parte, teorías como las de los sistemas dinámicos y del caos no hubieran podido recurrir a técnicas de visualización que han avivado la intuición de los matemáticos y han popularizado el tema entre otros científicos y los legos. Por otra parte, la computación ha abierto la posibilidad de demostrar teoremas matemáticos por medio del análisis exhaustivo de una cantidad tremenda de casos que estarían fuera de las posibilidades humanas de no contarse con ese recurso.

En 1976, los matemáticos Haken y Appel, de la Universidad de Illinois, informaron al mundo que habían demostrado el viejo problema de "colorear un mapa con sólo cuatro colores", abriendo una nueva era en las matemáticas. La demostración que presentaron reducía conceptualmente el problema a colorear en efecto una cantidad muy grande de mapas. Los que resultaba necesario revisar eran tantos que se requirió la ayuda de una computadora rápida que trabajó a lo largo de 1 200 horas. Por supuesto, completar este trabajo "rutinario" les habría tomado a Haken y Appel, sin computadora, varios miles de años.

El uso de las computadoras ha tenido una influencia notable en, al menos, tres aspectos de las matemáticas:

*a*) Las matemáticas se han convertido en una ciencia experimental, en el sentido de que algunos objetos matemáticos pueden representarse numéricamente en la computadora y exponerse a condiciones donde el matemático no sabe lo que va a pasar.

*b*) Las computadoras han permitido aplicar resultados matemáticos abstractos de maneras no previstas originalmente. Entre otros impresionantes ejemplos podemos citar la tomografía y la criptografía.

*c*) Las computadoras constituyen una herramienta útil para demostrar teoremas como el de los cuatro colores.

### *Las matemáticas en la cultura al final del siglo XX*

Tal vez el fenómeno más interesante que ha caracterizado las matemáticas de la segunda mitad del siglo XX lo consituyen las continuas interacciones entre sus diferentes áreas y entre las matemáticas y otras ciencias.

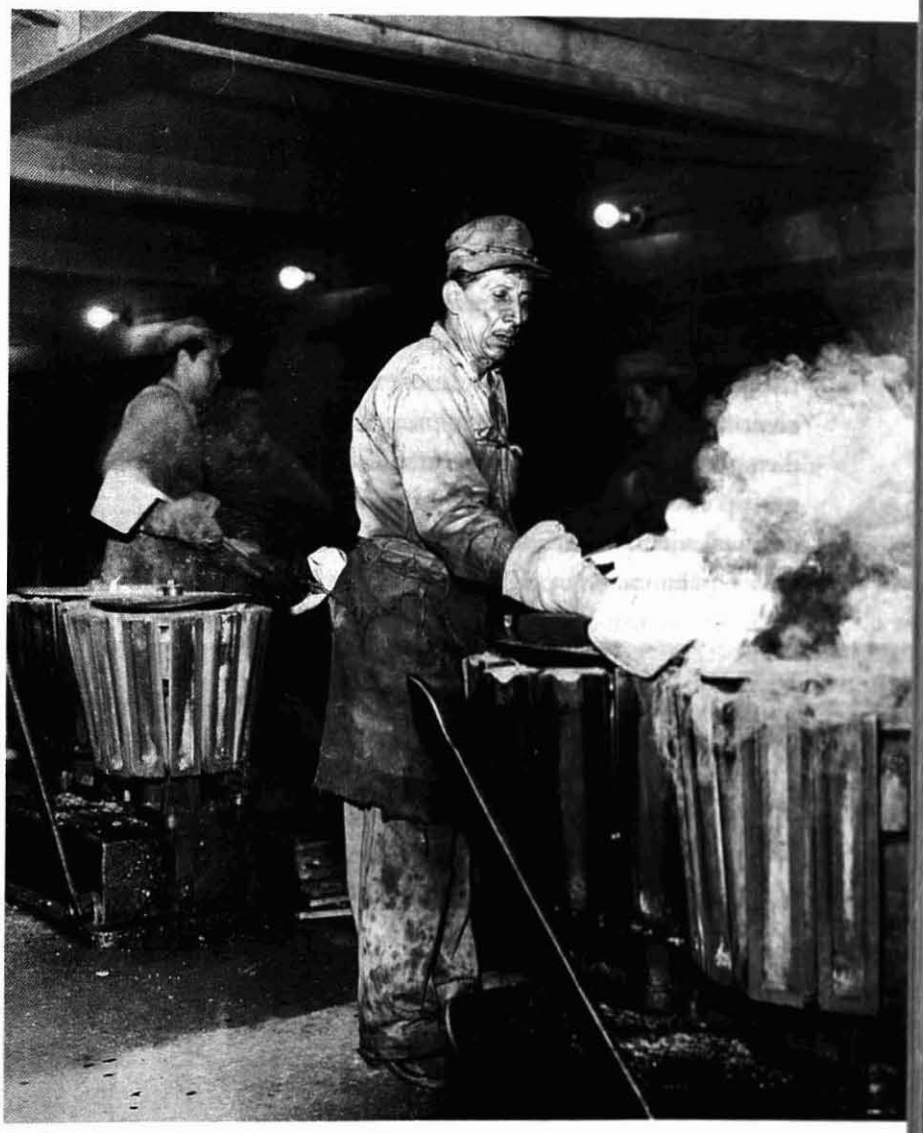
A principios de la centuria, algunas de las áreas más importantes de las matemáticas apenas surgían, mientras que otras sufrían el proceso de formalización. Por ello, es natural que durante algunos años los desarrollos principales se centraran dentro de cada una de las áreas de manera bien diferenciada de las otras. Sin embargo, los desarrollos posteriores se han localizado en la zona de interacción de dos o más áreas de las matemáticas. Así, podemos decir que el crecimiento más vigoroso en los

últimos años se ha registrado en topología algebraica, geometría algebraica, análisis funcional y teoría de operadores, teoría de números analítica, y en la aplicación de métodos topológicos a las ecuaciones diferenciales, entre otros temas.

Una tendencia unificadora más global ha surgido entre las matemáticas y las ciencias de la naturaleza: la física principalmente, aunque también la química y la biología. Por supuesto, en el proceso de comprensión de la naturaleza, un paso central se avanza cuando es posible construir modelos matemáticos para hacer predicciones. Este nivel de matematización ha sido bien comprendido por los físicos desde los tiempos de Newton y ha continuado hasta nuestros días. En otras disciplinas el proceso ha sido más lento, pero en general se espera que el proceso de matematización continúe.

A principios del siglo, el físico Eugene Wigner se asombraba ante la "irrazonable efectividad de las matemáticas" para describir la estructura del mundo físico. En efecto, las matemáticas surgen de la necesidad de contestar preguntas acerca del mundo físico y desempeñan un papel primordial en la obtención de las respuestas. Pero el proceso es rara vez directo. Con frecuencia, los objetos matemáticos surgidos del estudio de la naturaleza cobran una vida propia y se tornan interesantes para su estudio *per se*. En este caso, las ramas de las matemáticas arrojan resultados inaplicables directamente y que en principio guardan poca relación con los problemas originales. En muchas ocasiones estos resultados de "matemáticas puras" encuentran su aplicación tiempo después en otros problemas completamente inesperados (recuérdese, por ejemplo, el caso de la teoría de los números y sus recientes aplicaciones en la criptología).

En tiempos de Newton la física y las matemáticas eran esencialmente la misma cosa. Entonces, el desarrollo de las dos ciencias estaba indisolublemente unido. Sin embargo, las matemáticas habrían de tomar un derrotero diferente guiadas por el interés intrínseco de muchos de los objetos de estudio. Sin embargo, en los últimos lustros la tendencia parece revertirse. Recientemente, los físicos han vuelto a hablar, como en los tiempos de Newton, de las grandes teorías para comprender el funcionamiento del universo. Así, se estudian las supercuerdas, las supersimetrías y las Teorías Unificadas. En este gran esquema, las matemáticas no sólo siguen cumpliendo el papel relevante que poseen desde los tiempos de Newton (las leyes de la naturaleza son matemáticas), sino que regresan a reunificarse con la física. En efecto, la teoría del caos, las supercuerdas, el mundo de 26 dimensiones (o tal vez sólo 10), son teorías matemáticas tanto como físicas.



Casa de la Moneda, Ciudad de México, *ca.* 1957

También en las ciencias sociales y económicas se ha manifestado un cada vez mayor reconocimiento del papel de las matemáticas en la formalización de las teorías, en la expresión cuantificada de los fenómenos y en la capacidad predictiva de los modelos matemáticos. La impresión general es que una disciplina de conocimiento es

diados del siglo XVII, el matemático aficionado Pierre Fermat leía este libro y conjeturaba que, para ningún número $n$ mayor que 2, era posible hallar tripletas de números enteros $(a, b, c)$ de forma que la suma de las potencias $n$-ésimas de $a$ y de $b$ sea igual a la potencia $n$-ésima de $c$.

Al paso de los años, algunos de los matemáticos más importantes trataron vanamente de probar ese resultado, pero con su esfuerzo obtuvieron muchas otras cosas. Euler demostró que el caso $n = 3$ tampoco tenía soluciones. Para el principio del siglo XIX, ya se sabía que el Teorema de Fermat también era correcto en los casos $n = 5$ y $n = 7$. En 1964, el teorema había sido demostrado en cuanto a los números pares y los números menores que 25 013. Intentos de resolver este problema dieron inicio a ramas completas de las matemáticas como la teoría analítica de los números y la teoría de ideales en anillos.

Hubo tantos intentos fallidos de demostrar el referido teorema que cuando finalmente la solución llegó fue una sorpresa para todo mundo. Tal es la fama de este problema que los periódicos de todas partes publicaron notas informando que finalmente se había encontrado una demostración del mismo. En el verano de 1993, Andrew Wiles, profesor de Cambridge, Inglaterra, anunció que tenía una demostración contenida en un manuscrito de más de doscientas páginas y que había necesitado siete años en completar.

La demostración de Wiles del Último Teorema de Fermat es una muestra del grado de complejidad y profundidad que han alcanzado las matemáticas. Mientras que el problema de Fermat requiere una línea para escribirse y cualquier estudiante de secundaria puede entenderlo, la demostración requiere técnicas y resultados de álgebra y geometría que se desarrollaron a lo largo de siglos.

### *La computación y sus aplicaciones*

Si bien las esperanzas del desarrollo de la computación son todavía grandes, la verdad es que las máquinas creadas hasta ahora son simples calculadoras impresionantemente rápidas sin ninguna capacidad de razonamiento o aprendizaje y menos aún de reproducción. Sin embargo, el efecto que han tenido en las matemáticas de los últimos años es enorme. Por una parte, teorías como las de los sistemas dinámicos y del caos no hubieran podido recurrir a técnicas de visualización que han avivado la intuición de los matemáticos y han popularizado el tema entre otros científicos y los legos. Por otra parte, la computación ha abierto la posibilidad de demostrar teoremas matemáticos por medio del análisis exhaustivo de una cantidad tremenda de casos que estarían fuera de las posibilidades humanas de no contarse con ese recurso.

En 1976, los matemáticos Haken y Appel, de la Universidad de Illinois, informaron al mundo que habían demostrado el viejo problema de "colorear un mapa con sólo cuatro colores", abriendo una nueva era en las matemáticas. La demostración que presentaron reducía conceptualmente el problema a colorear en efecto una cantidad muy grande de mapas. Los que resultaba necesario revisar eran tantos que se requirió la ayuda de una computadora rápida que trabajó a lo largo de 1 200 horas. Por supuesto, completar este trabajo "rutinario" les habría tomado a Haken y Appel, sin computadora, varios miles de años.

El uso de las computadoras ha tenido una influencia notable en, al menos, tres aspectos de las matemáticas:

*a*) Las matemáticas se han convertido en una ciencia experimental, en el sentido de que algunos objetos matemáticos pueden representarse numéricamente en la computadora y exponerse a condiciones donde el matemático no sabe lo que va a pasar.

*b*) Las computadoras han permitido aplicar resultados matemáticos abstractos de maneras no previstas originalmente. Entre otros impresionantes ejemplos podemos citar la tomografía y la criptografía.

*c*) Las computadoras constituyen una herramienta útil para demostrar teoremas como el de los cuatro colores.

### *Las matemáticas en la cultura al final del siglo XX*

Tal vez el fenómeno más interesante que ha caracterizado las matemáticas de la segunda mitad del siglo XX lo constituyen las continuas interacciones entre sus diferentes áreas y entre las matemáticas y otras ciencias.

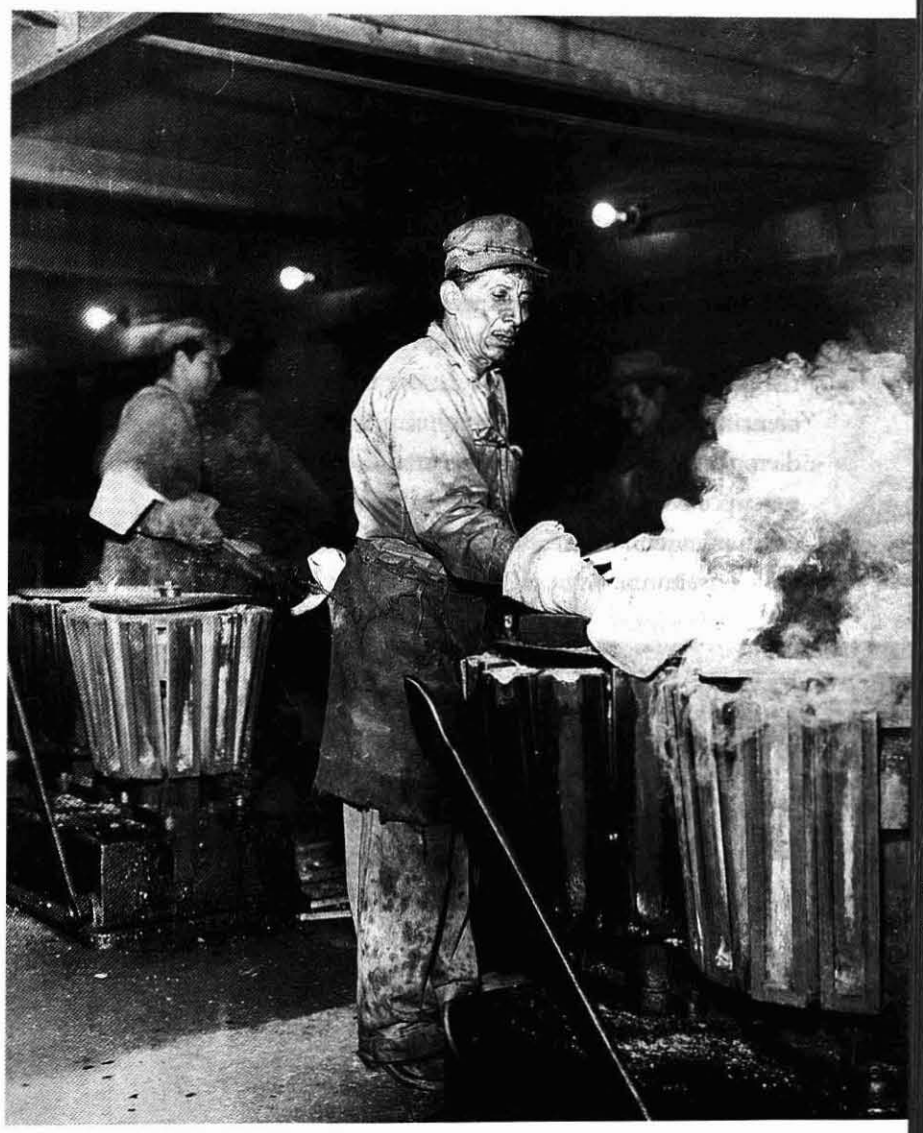
A principios de la centuria, algunas de las áreas más importantes de las matemáticas apenas surgían, mientras que otras sufrían el proceso de formalización. Por ello, es natural que durante algunos años los desarrollos principales se centraran dentro de cada una de las áreas de manera bien diferenciada de las otras. Sin embargo los desarrollos posteriores se han localizado en la zona de interacción de dos o más áreas de las matemáticas. Así podemos decir que el crecimiento más vigoroso en los

últimos años se ha registrado en topología algebraica, geometría algebraica, análisis funcional y teoría de operadores, teoría de números analítica, y en la aplicación de métodos topológicos a las ecuaciones diferenciales, entre otros temas.

Una tendencia unificadora más global ha surgido entre las matemáticas y las ciencias de la naturaleza: la física principalmente, aunque también la química y la biología. Por supuesto, en el proceso de comprensión de la naturaleza, un paso central se avanza cuando es posible construir modelos matemáticos para hacer predicciones. Este nivel de matematización ha sido bien comprendido por los físicos desde los tiempos de Newton y ha continuado hasta nuestros días. En otras disciplinas el proceso ha sido más lento, pero en general se espera que el proceso de matematización continúe.

A principios del siglo, el físico Eugene Wigner se asombraba ante la "irrazonable efectividad de las matemáticas" para describir la estructura del mundo físico. En efecto, las matemáticas surgen de la necesidad de contestar preguntas acerca del mundo físico y desempeñan un papel primordial en la obtención de las respuestas. Pero el proceso es rara vez directo. Con frecuencia, los objetos matemáticos surgidos del estudio de la naturaleza cobran una vida propia y se tornan interesantes para su estudio *per se*. En este caso, las ramas de las matemáticas arrojan resultados inaplicables directamente y que en principio guardan poca relación con los problemas originales. En muchas ocasiones estos resultados de "matemáticas puras" encuentran su aplicación tiempo después en otros problemas completamente inesperados (recuérdese, por ejemplo, el caso de la teoría de los números y sus recientes aplicaciones en la criptología).

En tiempos de Newton la física y las matemáticas eran esencialmente la misma cosa. Entonces, el desarrollo de las dos ciencias estaba indisolublemente unido. Sin embargo, las matemáticas habrían de tomar un derrotero diferente guiadas por el interés intrínseco de muchos de los objetos de estudio. Sin embargo, en los últimos lustros la tendencia parece revertirse. Recientemente, los físicos han vuelto a hablar, como en los tiempos de Newton, de las grandes teorías para comprender el funcionamiento del universo. Así, se estudian las supercuerdas, las supersimetrías y las Teorías Unificadas. En este gran esquema, las matemáticas no sólo siguen cumpliendo el papel relevante que poseen desde los tiempos de Newton (las leyes de la naturaleza son matemáticas), sino que regresan a reunificarse con la física. En efecto, la teoría del caos, las supercuerdas, el mundo de 26 dimensiones (o tal vez sólo 10), son teorías matemáticas tanto como físicas.



Casa de la Moneda, Ciudad de México, *ca.* 1957

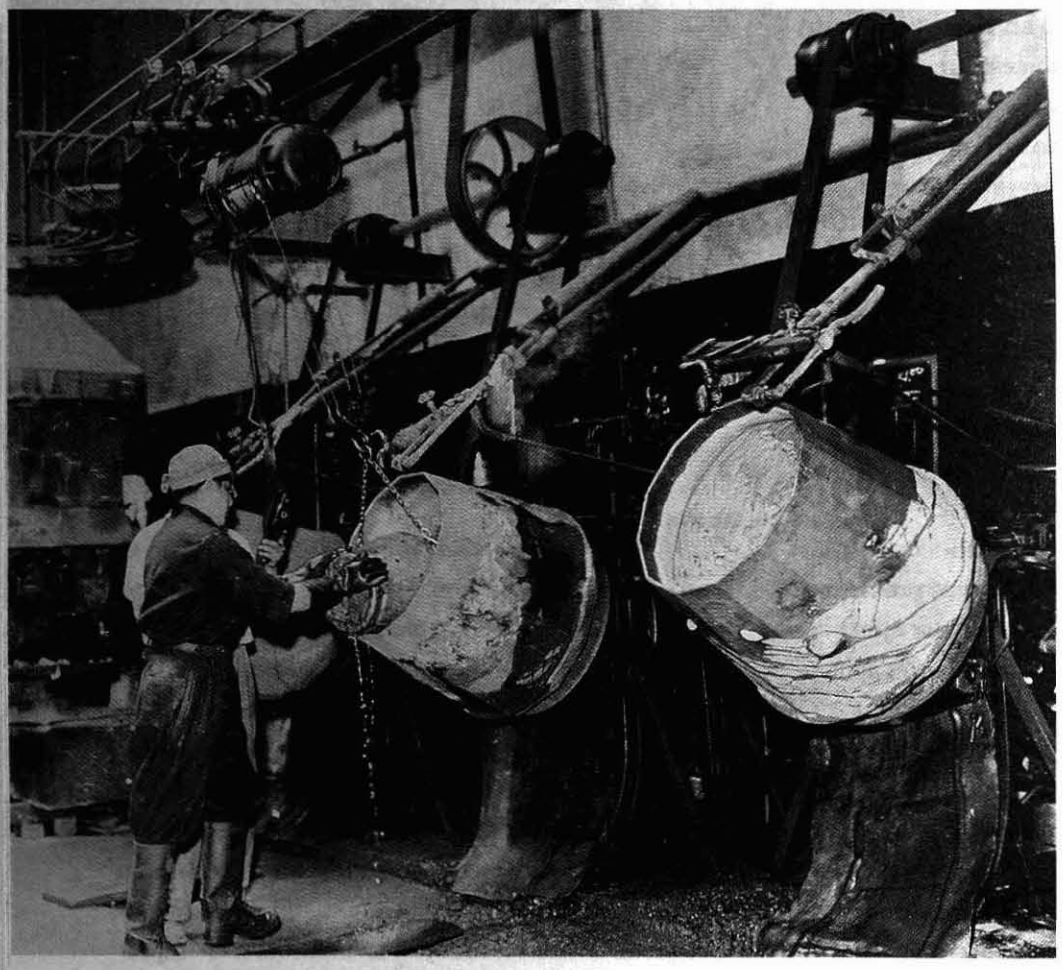
También en las ciencias sociales y económicas se ha manifestado un cada vez mayor reconocimiento del papel de las matemáticas en la formalización de las teorías, en la expresión cuantificada de los fenómenos y en la capacidad predictiva de los modelos matemáticos. La impresión general es que una disciplina de conocimiento es

tanto más científica cuanto sus modelos matemáticos son más precisos y sus variables pueden cuantificarse mejor. En este contexto, es la economía la que más ha avanzado, aunque en años recientes ha habido reacciones adversas a ella de quienes consideran necesario un retorno a la consideración de aspectos más cualitativos e intuitivos.

Quizás uno de los aspectos de la cultura donde la influencia de las matemáticas es más profunda es la educación. En la mayor parte de los países avanzados, se produjeron importantes reformas educativas durante los años sesentas y la enseñanza de las matemáticas ha sido uno de los ejes centrales de ellas. Poco a poco, esos cambios conceptuales fueron pasando a otros países y adoptaron diferentes formas, de acuerdo, por supuesto, con las características del medio local y la influencia de educadores y científicos prominentes. A esas primeras reformas sucedieron otras que obedecían a importantes críticas y reacciones, y posteriormente, en respuesta a los avances tecnológicos, fundamentalmente, se introdujeron las computadoras en la enseñanza.

Para algunos autores la fecha en que arranca la primera gran reforma de la enseñanza de las matemáticas puede fijarse en 1957. En ese año, el lanzamiento del primer satélite *Sputnik* efectuado por los soviéticos hizo temer a los estadounidenses que su rezago científico se debía a un atraso educativo general. Por ello, decidieron aumentar el gasto en educación y en ciencia y comisionaron a importantes grupos de científicos para que asesoraran al gobierno en la modificación de planes y programas de estudio desde los niveles elementales. En el informe "On the Mathematics Curriculum for the High School", un grupo de distinguidos matemáticos propuso que se introdujera la enseñanza de

> las matemáticas modernas. En vista de la falta de conexión entre las diferentes partes del plan actual, los grupos que trabajan en la elaboración del nuevo plan harían bien en introducir conceptos generales unificadores. Pensamos que el uso de la teoría de conjuntos y de los conceptos del álgebra abstracta puede dar más coherencia y unidad al plan de enseñanza secundaria.



Casa de la Moneda, Ciudad de México, *ca.* 1957

La coincidencia de intereses entre grupos importantes de matemáticos y de pedagogos hizo que la dirección de la reforma fuera inevitable. La teoría de conjuntos se introdujo en los currículos de las escuelas secundarias primero y posteriormente en las primarias y aun en escuelas maternales. Por supuesto, la reforma de la enseñanza de las matemáticas no vino sola. En realidad fue el eje de toda una transformación de la enseñanza de nivel medio y elemental. Por ejemplo, se impusieron cambios en la distribución de las bancas en los salones de clase (pequeños grupos en lugar de filas orientadas hacia el frente) y en la forma del maestro de dar clase (más atención individualizada y menos clase frente al grupo).

En los Estados Unidos, uno de los críticos más consistentes e influyentes de las reformas educativas ha sido Morris Kline. En 1973, su libro *Why Johnny Can't Add: the Failure of the New Math* señalaba una serie de problemas en los programas reformados: empleo injustificado y abundante de símbolos, vocabulario pedante, olvido de motivaciones físicas, pobreza de los ejercicios, mediocridad de los autores de los programas, entre otros. Muchos de estos aspectos se han ido modificando con el paso del tiempo, pero en lo esencial los métodos de enseñanza, muchos de ellos basados en las ideas que inspiraron las reformas de los años sesentas, se conservan aún.

### *Los retos de las matemáticas para el próximo siglo*

*Lo más bello que podemos experimentar es lo misterioso. Ésa es la fuente de todo el arte verdadero y la ciencia.*

*Albert Einstein*

Uno de los aspectos más preocupantes de las matemáticas de final de siglo es la casi completa separación de las matemáticas y la filosofía. El linaje de los matemáticos-filósofos es muy ilustre. Puede al menos remontarse a Pitágoras y Platón e incluye los nombres de Leibniz, Descartes, Pascal, Pierce, Russell, Whitehead y Poincaré, entre algunos más. Muchos otros matemáticos, sin ser filósofos, contaban con una posición filosófica sólida desde la cual enfocaban su trabajo matemático. En este segundo grupo podríamos ubicar fácilmente a Newton, Gauss, Hilbert y otros influyentes personajes. Muchos de estos matemáticos se distinguieron por su capacidad de comprender globalmente el papel de las matemáticas en las ciencias y en el mundo, lo que les permitió guiar el desarrollo de las matemáticas en su tiempo.

Tal vez una de las características más marcadas de las matemáticas, y probablemente de las ciencias en general, en esta segunda mitad del siglo XX ha sido la ausencia de filósofos-científicos que indiquen direcciones para el progreso de las ciencias. En este sentido, el físico Steven Weinberg nos indica:

> No conozco a nadie que haya participado activamente en el avance de la física después de la segunda Guerra Mundial cuyo trabajo de investigación haya sido significativamente apoyado por el trabajo de filósofos. Resalté antes el problema de lo que Wigner llama "la irrazonable efectividad" de las matemáticas; aquí quiero enfatizar otro fenómeno igualmente inquietante, el de la irrazonable inefectividad de la filosofía.

Peor aún, en ocasiones el trabajo reciente de los filósofos se vuelve en contra de la ciencia y cuestiona su validez desde posiciones poco sólidas, pero que resultan populares. Muchos de estos ataques a la ciencia surgen dentro de un esquema más general de hostilidad hacia la cultura occidental. En todo caso, es difícil especular sobre las causas que han llevado a esta separación de la filosofía y las ciencias. En lo que sí podemos estar seguros es en la importancia de revertir esta tendencia.

Por otro lado, las matemáticas han gozado en las últimas décadas del acercamiento con otras ciencias, en particular la física. Sorprendentemente, algunas de las ideas que emanaron de la física llevaron a importantes descubrimientos en matemáticas puras. Tal vez, el mayor número de estas ideas ha surgido de las teorías de campo cuánticas. Por supuesto, la fertilización de ideas se ha dado también en el sentido contrario, cuando las técnicas de álgebra y topología han tenido un importante efecto en la física cuántica. Es de esperar que en los años que vienen esta rica interacción entre las matemáticas y otras ciencias continúe.

Como hemos visto, las matemáticas se han enriquecido del desarrollo de la computación y del resurgimiento de sus contactos con otras ciencias, y han gozado de un crecimiento interno vigoroso con importantes repercusiones conceptuales. Todo esto ha ocurrido junto con un cambio en la valoración de la trascendencia que el matemático promedio atribuye a su trabajo. En 1940, G.H. Hardy, hablando a título personal, pero sin duda representando el sentir de gran número de matemáticos, decía (la cita proviene del final del libro *Autojustificación de un matemático*. En el prólogo del libro, C. P. Snow pide considerar el momento histórico en que el libro se escribió. La segunda Guerra Mundial no ha terminado, pero un gran número de científicos, entre ellos algunos matemáticos, han tenido que tomar una posición bien definida y colaborar con sus conocimientos en la lucha):

> Nunca he producido nada útil. Ninguno de mis conocimientos ha supuesto, directa o indirectamente, la más mínima alteración sobre la afabilidad del mundo, ni para bien ni para mal. He ayudado a formarse otros matemáticos del mismo tipo que yo, y su trabajo ha sido, sea

cual sea la ayuda que de mí hayan recibido, tan inútil como el mío propio. Juzgado desde el punto de vista práctico, el valor de mi vida como matemático es nulo y, en cualquier caso, fuera de mi actividad profesional es trivial. Tan sólo me queda una posibilidad de escapar del veredicto de absoluta trivialidad: haber creado algo digno de serlo. Es incuestionable que he creado algo: el problema reside en determinar si tiene algún valor.

Al final del siglo XX podemos decir que el sentimiento de los matemáticos es muy diferente. El valor del conocimiento y la práctica de las matemáticas no se estima solamente en el contexto del trabajo profesional matemático. Su valor en la enseñanza del razonamiento lógico y sus múltiples aplicaciones en otros campos están bien determinados. El matemático actual es consciente del poder de los métodos que domina y de la trascendencia de sus resultados.

Uno de los grandes retos para los años que vienen, tanto en las matemáticas como en otras ciencias, es tratar de crear una verdadera *cultura científica* entre el público general. Si bien actualmente un buen porcentaje de la gente piensa que la ciencia es interesante, pocas son las ideas científicas que conoce y menos aun las que entiende el gran público. En cambio, las seudociencias y la charlatanería ganan cada día más terreno. Éste es un peligro real para la continuidad del apoyo social a las ciencias y en última instancia para la subsistencia del mundo tal como lo conocemos.

Con estas preocupaciones en mente, recientemente organizamos una encuesta sobre cultura científica entre los habitantes del área urbana de la Ciudad de México (véase M. Barot y J. A. de la Peña, "¿Cuánto tarda la tierra en dar una vuelta alrededor del sol en México?", en *Este País*, febrero de 1999). El resultado es que 65% de las personas piensa que la ciencia es interesante, pero sus conocimientos elementales en la materia son escasos y revelan una pobre cultura. A la pregunta del título del artículo citado contestaron correctamente menos de setenta por ciento de los entrevistados. En matemáticas las cosas son peores: a la pregunta de cuánto es un medio por un medio, contestaron correctamente sólo 30%. Para corregir estos graves problemas se deberá trabajar seriamente en transformaciones de la enseñanza de las matemáticas y de las ciencias en general desde los niveles elementales, pero además, como ya decíamos antes, se deberá trabajar también por integrar a las ciencias como parte de la cultura popular, de manera que no sólo hechos elementales de ciencia sean ampliamente conocidos, sino que el espíritu crítico y la curiosidad científica se conviertan en valores apreciados.

### *Soñando*

*Todo lo que vemos o parecemos*
*No es sino un sueño dentro de otro sueño*

*Edgar Allan Poe*

— La ciencia del futuro tenderá a reunificar muchas de las actuales disciplinas (matemáticas, física, química, biología, computación) en una sola gran ciencia, borrando en esencia los límites disciplinarios y usando para sus fines las herramientas teóricas y prácticas de todas las disciplinas concurrentes.

— En esta gran ciencia de frontera, los científicos seguirán siendo individuos altamente especializados como lo son actualmente; sin embargo, dentro de las restricciones de la especialidad, deberán conocer a fondo varias disciplinas y técnicas para poder ser verdaderos líderes científicos. Para todos estos científicos será necesaria una formación adecuada en matemáticas y computación.

— En esta gran ciencia, las matemáticas cumplirán un papel primordial, similar al que hoy tienen en la física. La finalidad de la ciencia seguirá siendo la creación de modelos matemáticos que, mediante la cuantificación de variables bien definidas, permitan predecir fenómenos.

— Sin duda, queda mucho por hacer en ciencia. El desarrollo de la gran ciencia que antes mencionamos está aún en sus etapas iniciales y los grandes descubrimientos unificadores son difíciles de imaginar.

— En el futuro, la popularización de la ciencia deberá tener un papel más importante que el actual. La enseñanza de la ciencia y en particular de las matemáticas se deberá adecuar a los rápidos cambios tecnológicos y conceptuales.

— En el futuro la ciencia colaborará de manera más eficiente a solucionar los problemas más acuciantes de la humanidad: el hambre, las enfermedades, los conflictos sociales.

— Un reto para la gran ciencia será comprender el funcionamiento de la mente humana y la conciencia, así como las aplicaciones del conocimiento relativo a ello. ◆