EL CAOS DETERMINISTA: LOS LÍMITES DE LA PREDICCIÓN CIENTÍFICA

Rafael Pérez Pascual*

Los grandes logros que había acumulado la ciencia a finales del siglo XIX, señalaban al determinismo como el sustento real de la naturaleza. La mecánica clásica, iniciada por Galileo, establecida por Newton y enormemente desarrollada durante los siglos XVIII y XIX, había triunfado. Su visión determinista y su capacidad predictiva se convirtieron en paradigma científico. El establecimiento de la teoría electromagnética por Maxwell, la sistematización de la química con la Tabla Periódica, la termodinámica como ciencia de los fenómenos de la materia en bulto, del calor y la energía, el triunfo de la teoría atómica de la materia y la síntesis de compuestos orgánicos a partir de los inorgánicos, ratificaron ese paradigma determinista y predictivo de la mecánica clásica y lo extendieron al estudio científico de todos los aspectos conocidos de la materia.

Por otro lado, al final del siglo XIX se encontraron varios hechos experimentales que, en nuestro siglo, darían lugar a una teoría que pone en duda el determinismo: la mecánica cuántica. Ésta puede entenderse como una teoría no determinista del comportamiento de la materia. Postula el indeterminismo y se limita, por principio, a un nivel probabilístico en su capacidad de predicción.

El indeterminismo de la mecánica cuántica ha sido objeto de un gran número de discusiones, tanto entre científicos como entre filósofos. En este artículo no tomaremos esta línea de discusión*, abordaremos el otro pilar del paradigma científico: la predictivilidad. Arranca, este aspecto, con la misma situación de la ciencia a finales del siglo XIX y reaparece en los últimos años con resultados importantísimos para la física y para una concepción general de la naturaleza. Destacan, entre ellos, el descubrimiento del llamado caos determinista y de dificultades fundamentales en la capacidad predictiva de la mecánica clásica.

La mecánica clásica, a fines del siglo pasado, había logrado establecerse como una teoría matemática profunda y acabada del movimiento de los cuerpos. Había sido capaz de resolver completamente y en forma general el movimiento de los sistemas llamados integrables, que incluyen algunos tan importantes como el movimiento de un planeta alrededor del Sol, el movimiento de un trompo simétrico y otros muchos igualmente importantes. La mecánica había descubierto que todos ellos eran reducibles, en esencia, a uno solo: el movimiento de una colección de osciladores armónicos desacoplados. Desde luego el realizar esa reducción en forma concreta para un sistema específico, lo que los físicos llamamos establecer un sistema de variables de acción y ángulo, puede ser muy difícil, pero se trata de una dificultad de cálculo y no de comprensión teórica.

Esto hizo pensar que en el caso de los sistemas no integrables existirían también métodos sistemáticos para resolverlos y que sus órbitas, si bien podrían ser más complicadas, en esencia presentarían características similares a las de los sistemas integrables. Era sólo una idea, ya que no se había podido resolver ningún sistema no integrable y, dada la escasa capacidad de cálculo numérico que se tenía, no era factible encontrarles soluciones numéricas; en realidad no había un conocimiento firme sobre el asunto de los sistemas no integrables.

A principios de nuestro siglo ocurrieron dos grandes revoluciones de la física: la formulación de la teoría de la rela-

* Miembro del Instituto de Física, UNAM

* Véase en este mismo número el artículo de Ana María Cetto y Luis de la Peña y el de Tomás Brody para una discusión sobre los temas de la mecánica cuántica y del determinismo.

tividad y de la teoría cuántica. Esto condujo a los físicos a dedicarse a estos temas y a sus aplicaciones, por lo que prácticamente olvidaron el problema no resuelto de los sistemas mecánicos no integrables.

Sólo algunos matemáticos interesados en el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales y algunos físicos interesados en la mecánica celeste continuaron su estudio, pero los escasos avances que se dieron no arrojaron mucha más luz a lo ya conocido por Poincaré a principios de siglo.

A mediados de la década de los años sesenta, el interés por los sistemas no integrables y otros problemas físicos o matemáticos que presentan situaciones similares comenzó a cambiar. Varios factores de índole muy diversa convergen durante esa década: el desarrollo de la teoría matemática de las ecuaciones diferenciales y de los sistemas dinámicos en general; los problemas prácticos que aparecen en el lanzamiento de naves espaciales, pues para calcular sus órbitas hay que tratar con problemas no integrables de mecánica celeste; lo mismo ocurre en el diseño de anillos almacenadores de protones y otras partículas cargadas, que se hacen girar en órbitas determinadas por campos magnéticos complejos; la creciente importancia, teórica y práctica, de contar con desarrollos matemáticos en el campo de la hidrodinámica y la aerodinámica, en especial en los regímenes turbulentos; la necesidad de trabajar las ecuaciones diferenciales de los circuitos electrónicos, sobre todo aquellos altamente no lineales. Un aspecto fundamental es la invención de las computadoras electrónicas y el incremento explosivo que produjeron en la capacidad para calcular numéricamente soluciones de problemas no lineales.

De entre las muchas cuestiones que se han podido establecer, destaca el descubrimiento, en los sistemas no lineales, de un comportamiento realmente sorprendente y que tiene profundas implicaciones para el pensamiento científico. Se ha llamado a este comportamiento alta sensibilidad a condiciones iniciales, caos determinista o simplemente caos. Veamos un ejemplo ilustrativo.

Imaginemos dos estrellas que interaccionan gravitacionalmente. Éste es el problema clásico de Kepler, resuelto en su totalidad por Newton hace más de trescientos años. El movimiento de esas estrellas ocurre en un plano, ambas recorren órbitas elípticas que comparten uno de sus focos y éstos coinciden con el centro de masas del sistema. Supondremos que las dos estrellas tienen la misma masa, por tanto las dos órbitas elípticas son iguales y se encuentran colocadas simétricamente con respecto al centro de masas, al igual que las estrellas (fig. 1).

El sistema estelar binario es integrable y está totalmente resuelto. Incorporemos a ese sistema un pequeño asteroide. Debido a que la masa del asteroide es muchísimo más pequeña que la masa de las estrellas, podemos suponer que la presencia del asteroide no altera el movimiento de las estrellas, las que continuarán recorriendo sus órbitas elípticas sin modificación. Por otro lado, el asteroide se verá actuado por la atracción gravitacional de las estrellas y esta atracción determina su movimiento. Es importante notar que el movimiento del asteroide corresponde a un sistema no integrable.

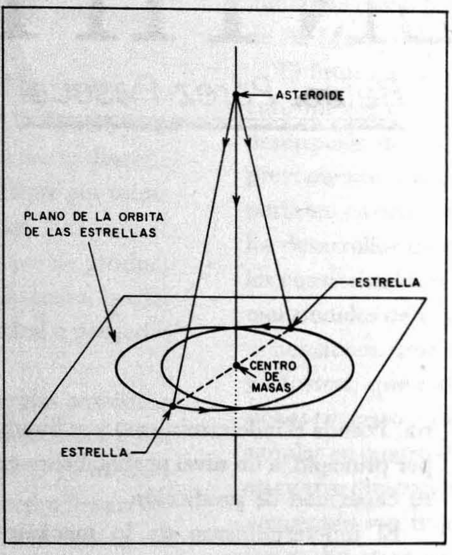

Fig. 1

Si el asteroide se coloca sobre una recta perpendicular al plano de las órbitas de las estrellas de forma tal que pase por el centro de masas de éstas, la resultante de las dos fuerzas de atracción que recibe estará, debido a la posición simétrica de las estrellas, dirigida a lo largo de esa recta. Esto es, el asteroide será siempre atraído hacia el centro de masas. Si suponemos además que la velocidad inicial del asteroide estaba dirigida a lo largo de la recta, el asteroide, en su movimiento, permanecerá siempre sobre dicha recta.

La fuerza que actúa sobre el asteroide apunta en una dirección cuando el asteroide está de un lado del plano y en la dirección contraria cuando está del otro lado. Esto produce un movimiento oscilatorio del asteroide, que lo hará pasar de un lado al otro. Este ir y venir del asteroide, no ocurre periódicamente ni cuasiperiódicamente, como ocurriría si el sistema fuera integrable.

La complejidad e irregularidad del movimiento del asteroide queda totalmente reflejada en un interesante teorema. En su movimiento de vaivén el asteroide pasa repetidamente por el plano de las órbitas; podemos, pues, medir los intervalos de tiempo entre pasos consecutivos del asteroide por ese plano. Estos intervalos de tiempo forman una sucesión de números (por ejemplo 3.465 seg., 23.2343 seg., etcétera). El teorema asegura que dada cualquier sucesión de números reales, existen condiciones iniciales para el asteroide, es decir, una posición inicial sobre la recta y una velocidad inicial a lo largo de ella, tales que la sucesión de números formada por los intervalos de tiempo entre pasos consecutivos del asteroide por el plano, reproduce exactamente la sucesión dada.

Las consecuencias de esto son sorprendentes e importantes. Imaginemos una secuencia de números, por ejemplo los resultados de la lotería en los últimos cincuenta años: el asteroide, al moverse en forma totalmente determinista por la influencia gravitacional de las estrellas, puede reproducir, en los intervalos de tiempo entre sus pasos consecutivos por el plano, esa secuencia, que todos consideramos totalmente azarosa.

Otra forma de ilustrar esto consiste en imaginar a un astronauta que se encuentra con ese sistema estelar. Observa al asteroide ir y venir y anota los tiempos que tarda entre pasos consecutivos por el plano de las órbitas. Podrá tomar tantos valores como quiera, pero no podrá, con base en esos datos, predecir el tiempo en que ocurrirá el siguiente paso, ni siquiera en forma aproximada. Esto se debe a que una sucesión de números posible es la observada y luego, por ejemplo 3.45 y otra sucesión, igualmente válida, es la formada por los datos observados y luego 576.98737636; como hay condiciones iniciales para las que el asteroide reproduce la primera y otras para las que reproduce la segunda, no se puede, con base en los datos que se tomen, predecir cuál de los dos números saldrá; es más, como todas las sucesiones formadas por los números observados seguidos de cualquier otro son igualmente válidas, el asteroide podría estar en una órbita que reproduce cualquiera de ellas y por tanto, el conocimiento experimental de los valores anteriores no permite predecir nada sobre el siguiente valor.

Este es un ejemplo, muy ilustrativo y llamativo, de una propiedad muy frecuente entre los sistemas no integrables y los no lineales en general. En las últimas décadas se han demostrado formalmente este tipo de cuestiones y se han encontrado multitud de ejemplos, con relevancia física, en los que aparecen comportamientos de esta naturaleza.

El origen de esta propiedad de irregularidad en el seno de sistemas totalmente deterministas, está en lo que llamamos fuerte dependencia de las condiciones iniciales. Es decir, las soluciones del sistema, a pesar de ser totalmente deterministas, divergen unas de otras en forma exponencial, por tanto, aunque comencemos con condiciones iniciales muy parecidas, las soluciones, después de un breve tiempo, serán muy distintas, y se hace imposible el estudio de un sistema de esta naturaleza utilizando aproximaciones.

En el caso del asteroide, el conocimiento de una cierta cantidad de intervalos de tiempo nos permite deducir las condiciones iniciales sólo en forma aproximada; para poderlas deducir exactamente requeriríamos un número infinito de datos, lo que es imposible; además, si ya tenemos todos los valores de la sucesión, no tiene sentido preguntarnos por el siguiente. La aproximación obtenida de una secuencia finita de datos conduce, en este caso, a un error que se amplifica exponencialmente, haciendo imposible la predicción del siguiente valor.

Otra propiedad de estos sistemas es la gran complejidad o irregularidad de sus soluciones. Esto es consecuencia de lo mismo: las soluciones, por un lado, se separan exponencialmente en todo instante y punto y, por otro lado, se desarrollan en un espacio acotado, por lo que deben enredarse en formas muy complejas, que vemos como una gran irregularidad o como algo caótico. Comparemos esto con lo que ocurre en los sistemas integrables o no caóticos: en éstos las soluciones u órbitas son muy regulares, como las órbitas elípticas de un planeta y si comenzamos con situaciones o condiciones iniciales cercanas, las soluciones no se separan exponencialmente, lo que permite hacer cálculos aproximados.

El comportamiento caótico que hemos ejemplificado con sistemas mecánicos conservativos, aparece también en sistemas disipativos bajo la forma de los llamados atractores extraños. Un ejemplo, que se ha hecho clásico por ser de los primeros en que se encontró este comportamiento, es el atractor de Lorenz. Éste nos permite ilustrar la diferencia entre una órbita caótica y otra que no lo es, al comparar una de las órbitas del sistema de Lorenz, presentada en la figura dos, con, por ejemplo, la elipse que recorre un planeta.

Los sistemas de ecuaciones diferenciales no son los únicos que presentan el caos determinista, ocurre también en los sistemas discretos. Un ejemplo, que podemos considerar clásico, es el de la iteración de la logística. Este ejemplo tiene la enorme ventaja de que cualquiera puede estudiarlo con la simple ayuda de una calculadora o, mejor aún, con una computadora casera (en la figura 3 encontrará el lector un programa en Basic para estudiar este ejemplo).

El proceso consiste en lo siguiente: tomemos un número cualquiera entre cero y uno y llamémoslo X_0, apliquemos la fórmula:

$$X_1 = A X_0 (1 - X_0),$$

y obtendremos un nuevo valor: X_1. Si ahora tomamos este nuevo valor y aplicamos la fórmula nuevamente obtendremos:

$$X_2 = A X_1 (1 - X_1),$$

continuando de esta forma construimos una sucesión de números, pues obtenemos el número X_{i+1} a partir del X_i por medio de la fórmula:

$$X_{i+1} = A X_i (1 - X_i).$$

Hay que destacar que si el valor de A está entre cero y cuatro, todas las Xi estarán entre cero y uno.

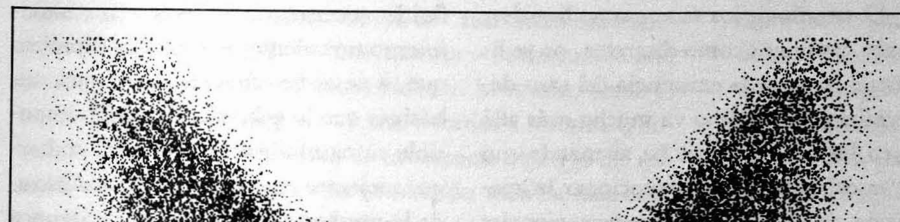

Fig. 2

```
1    PRINT " DE EL VALOR DEL PARÁMETRO A, DEBE ESTAR ENTRE 1 Y 4 "
10   INPUT A
20   IF A < 1 OR A > 4 THEN GOTO 500
30   PRINT "DE EL VALOR INCIAL DE x, ESTO ES X0, DEBE ESTAR ENTRE 0 Y 1"
40   INPUT x0
50   IF x0 < 0 OR x0 > 1 THEN GOTO 510
60   x = x0
70   FOR i = 1 TO 100: x = A * x * (1 - x): NEXT i
80   FOR i = 1 TO 150
90   x = A * x * (1 - x)
100  PRINT "n= ", i, "Xi= ", x
110  NEXT i
120  PRINT " DESEA DAR OTRO VALOR DEL PARÁMETRO, SI o NO"
130  INPUT s$
140  IF s$ = "si" GOTO 1 ELSE GOTO 150
150  PRINT "DESEA DAR OTRO VALOR INICIAL, SI o NO"
160  INPUT s$
170  IF s$ = "si" GOTO 30 ELSE GOTO 600
500  PRINT " ERROR EL VALOR DE A DEBE ESTAR ENTRE 1 Y 4, UD. DIO", A
501  GOTO 1
510  PRINT " ERROR EL VALOR DE X0 DEBE ESTAR ENTRE 0 Y 1. UD. DIO", x0
511  GOTO 30
600  END
```

Fig. 3

Esta sucesión es equivalente a la solución de una ecuación diferencial y el valor X_0 a la condición inicial; estos sistemas se conocen como ecuaciones en diferencias finitas y tienen propiedades muy similares a las que tienen las ecuaciones diferenciales.

Desde luego la sucesión que obtengamos dependerá de X_0 y del parámetro A. Si A está comprendido entre uno y tres, notaremos que después de unas cuantas iteraciones llegaremos a un valor fijo, esto es, obtendremos siempre el mismo valor al iterar. Este valor dependerá del valor A, pero será independiente de la condición inicial, esto es, del valor asignado a X_0.

Si a A le damos un valor comprendido entre 3 y 3.45. . ., por ejemplo 3.32, después de unas cuantas iteraciones veremos que los valores que obtenemos al iterar son dos y que estos dos valores simplemente se alternan; nuevamente estos valores son totalmente independientes del valor inicial, aunque dependen del valor asignado al parámetro A.

Si A está comprendido entre 3.45. . . y 3.54. . . ocurrirá lo mismo, pero ahora serán cuatro, y no dos, los valores que se alternarán al ir iterando. Si A está entre 3.54. . . y 3.56. . . serán ocho los valores que se alternen al iterar y así sucesivamente: al ir aumentando el valor de A, se irá duplicando el número de valores que se alternen al iterar; desde luego hay que hacer unas cuantas iteraciones iniciales para converger a este comportamiento periódico del sistema; una vez alcanzado el comportamiento periódico esos valores serán independientes de X_0, aunque dependerán del parámetro A.

Este proceso de duplicación del periodo termina cuando alcanzamos un número infinito de duplicaciones, lo que ocurre aproximadamente en el valor 3.5699456. . . del parámetro A. Para valores mayores (por ejemplo 3.91) podremos obtener órbitas caóticas; la sucesión de números obtenida por iteración es indistinguible de una sucesión de números aleatorios, pero está totalmente determinada por el propio proceso iterativo. Se reproduce, con todas sus características, el fenómeno del caos determinista, en esta ocasión para un caso en diferencias finitas. En el rango 3.5699. . . $< A <$ 4.0 también encontraremos valores de A que producen órbitas periódicas de periodos impares, por ejemplo para A = 3.83.

El estudio de los sistemas no lineales, tanto continuos como discretos, no se limita a mostrar la existencia del caos determinista, de hecho va mucho más allá y en los últimos años ha avanzado con gran celeridad. Baste mencionar la aparición de varias revistas internacionales especializadas en estos temas.

Un ejemplo importante de estas ciencias de lo no lineal lo ofrece el mismo proceso de iteración que ya estudiamos. Al variar el parámetro A, el periodo de las soluciones asintóticas se duplica, las duplicaciones ocurren en ciertos valores de A, luego permanece el mismo periodo durante un intervalo de valores, hasta llegar al siguiente valor de cambio o bifurcación, donde se da el fenómeno de la duplicación nuevamente. Pues bien, este fenómeno de la duplicación del periodo no es exclusivo del sistema estudiado; resulta ser que hay muchos sistemas, gobernados por ecuaciones diferenciales o por iteración de mapeos, en una o varias dimensiones, que presentan el mismo comportamiento ante el cambio de sus parámetros. A finales de los años setenta Feigenbaum realizó un descubrimiento importante sobre este fenómeno. Imaginemos que llamamos A_1 al valor del parámetro en el que comienza la región de periodo dos, con A_2 denotamos el valor para el que ocurre la bifurcación a periodo cuatro y así sucesivamente, esto es, A_n denota el valor de A para el cual ocurre la bifurcación a periodo 2^n. Naturalmente estos valores serán distintos en cada caso de ocurrencia del fenómeno de doblamiento del periodo, sin embargo la cantidad:

$$d = \lim_{i \to \infty} \frac{A_{i+1} - A_i}{A_i - A_{i-1}}$$

tendrá el mismo valor para cualquier proceso de esta naturaleza.

El número d, cuyo valor es 4.6692. . ., es, en cierto sentido, universal. Aparecerá en todo fenómeno de duplicación del periodo que tenga como esencia el mismo fondo matemático que la iteración de mapeos como el que estudiamos.

Una de las principales consecuencias de este hecho, y otros similares, es proporcionar un método para estudiar experimentalmente sistemas muy complejos. Un ejemplo de esto lo obtenemos en el estudio de la turbulencia. Cuando un fluido comienza a presentar un movimiento turbulento, se hace tan complejo que, a pesar de conocerse las ecuaciones básicas que lo gobiernan, ha sido imposible su estudio matemático. Sin embargo, recientes experimentos han mostrado la presencia del número d en algunos fluidos turbulentos y esto indica mecanismos matemáticos sustancialmente iguales al de la iteración de mapeo que estudiamos. En este sentido, la turbulencia no es otra cosa que el movimiento de un fluido en un régimen de caos determinista.

Estudios como éste se han multiplicado en los últimos años, llegando a constituir una nueva disciplina científica con importantes repercusiones. Por hoy deseamos sólo destacar el descubrimiento básico: la existencia de sistemas deterministas pero impredecibles y, en muchos sentidos, indistinguibles de los fenómenos considerados aleatorios. No dudamos que este hecho traerá consecuencias enormes para nuestros paradigmas científicos y para la concepción científica de la materia y del Universo mismo. ◊